国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

SHU XUE

选择性必修

第一册

江蘇鳳凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

普通高中教科书

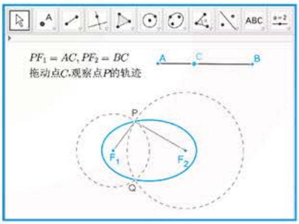
数学

SHU XUE

选择性必修

第一册

苏教版高中数学教材编写组 编著



江蘇鳳凰教育出版社
Phoenix Education Publishing, Ltd

主　　编　单　墫　李善良

副 主 编　葛　军　徐稼红　石志群

本册主编　樊亚东

编写人员　孙旭东　张松年　葛　军　徐稼红　樊亚东　李善良
　　　　　　祁建新　石志群　仇炳生　张乃达　单　墫

责任编辑　田　鹏

大自然这本书是用数学语言写成的.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学,高中阶段的数学学习生活有趣吗?

我们知道,数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活,对我们的终身发展有较大的影响.

怎样学习数学?

第一,要学会发现问题、提出问题. 面对各种情境(生活的、数学的、科学的),我们需要学会观察、实验、归纳,学会从特殊到一般、从具体到抽象、从模糊到清晰,大胆地提出数学问题.

第二,要尝试分析并解决所提出的问题. 通过抽象、推理、建模、运算等多种活动,建立数学理论,并运用这些数学理论去解决问题.

第三,要学会回顾反思. 在解决完问题之后,要思考:我们是如何解决这个问题的,从中可以得到哪些启发,还能提出哪些问题.

在数学学习过程中,我们要主动地学习数学基础知识、基本技能,自觉地感悟基本数学思想,不断积累数学活动经验,提升数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等核心素养,并逐步学会用数学眼光观察世界、用数学思维思考世界、用数学语言表达世界.

通过数学学习,我们会发现数学非常奇妙,非常有趣. 数学将给我们以新奇和动力,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展. 我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要，本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受·理解”部分、阅读、本章回顾、本章测试等内容构成一个完整的体系. 它体现了教科书的基本要求，是所有学生应当掌握的内容，相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容，包括思考、探究、链接、问题与探究、应用与建模，以及习题中的“思考·运用”“探究·拓展”等. 在掌握基本内容之后，选择其中一些内容作思考与探究，相信你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

k_l（或 k_{AB}）	直线 l 的斜率（或直线 AB 的斜率）
AB 或 $\|AB\|$	线段 AB 的长度
直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$	两条直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$
曲线 C：$f(x, y)=0$	曲线 C，它的方程是 $f(x, y)=0$，方程是 $f(x, y)=0$ 的曲线 C
a_n	数列$\{a_n\}$的第 n 项
S_n	数列的前 n 项和
Δx	自变量 x 的增量
Δy	函数 y 的增量
$f'(x_0)$	函数 $f(x)$在 x_0 处的导数
$f'(x)$	函数 $f(x)$的导函数
y'	函数 y 的导函数

第 1 章　直线与方程

- 直线与方程
  - 直线的斜率与倾斜角
  - 直线的方程
    - 直线的点斜式方程
    - 直线的两点式方程
    - 直线的一般式方程
  - 两条直线的平行与垂直
  - 两条直线的交点
  - 平面上的距离
    - 平面上两点间的距离
    - 点到直线的距离

如果代数与几何各自分开发展，那么它的进步将十分缓慢，而且应用范围也很有限. 但若两者互相结合而共同发展，则会相互加强，并以快速的步伐向着完美化的方向猛进.

——拉格朗日

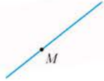
现实世界中，到处有美妙的曲线，从飞逝的流星到雨后的彩虹，从古代的石拱桥到现代的立交桥……

行星围绕太阳运行，人们可以建立行星运动的轨迹方程，并借助方程进一步认识它的运动规律.

在建造桥梁时，我们可以根据要求，首先确定桥拱所对应的曲线的方程，然后进行进一步的设计和施工.

曲线可以看成满足某种条件的点的集合. 引进平面直角坐标系后，平面内的点可以用坐标 (x, y) 来表示. 根据曲线的几何特征，可以得到曲线上任意一点的坐标 (x, y) 满足的一个方程 $F(x, y)=0$；反过来，以方程 $F(x, y)=0$ 的解 (x, y) 为坐标的点也都在曲线上. 这样，对曲线性质的研究就可以通过对方程 $F(x, y)=0$ 的研究来进行.

直线是最常见的几何图形，直线也可以看成满足某种条件的点的集合. 在平面直角坐标系中，当点用坐标 (x, y) 表示后，直线便可用一个方程 $F(x, y)=0$ 表示，进而通过对方程的研究来研究直线.



$\Rightarrow F(x, y)=0$

- 如何建立直线的方程？
- 如何利用直线的方程研究直线的性质？

1.1 直线的斜率与倾斜角

我们知道，过一点可以画出无数条直线. 如图 1-1-1，过点 P 的两条直线 PA，PB 的区别在于它们的倾斜程度不同.

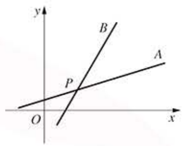


图 1-1-1

● 如何刻画直线的倾斜程度呢？

在实际生活中，楼梯或路面的倾斜程度可以用坡度来刻画（图 1-1-2）.

坡度指坡面的铅直高度与水平宽度的比. 铁路坡度用千分率（‰）表示，公路坡度用百分率（%）表示.

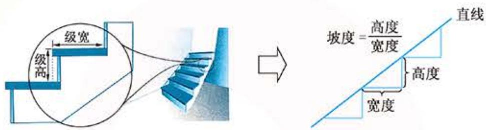


图 1-1-2

可以看出，如果楼梯台阶的高度（级高）与宽度（级宽）的比值越大，那么坡度就越大，楼梯就越陡.

在平面直角坐标系中，我们可以采用类似的方法来刻画直线的倾斜程度.

对于直线 l 上的任意两点 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，如果 $x_1 \neq x_2$（图 1-1-3(1)），那么由相似三角形的知识可知，$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 是一个定值，我们将其称为直线 l 的**斜率**(slope).

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2).$$

如果 $x_1 = x_2$（图 1-1-3(2)），那么直线 l 的斜率不存在.

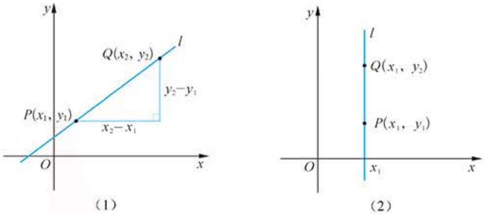


图 1-1-3

对于与 x 轴不垂直的直线 l，它的斜率也可以看作

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\text{纵坐标的增量}}{\text{横坐标的增量}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

例 1 如图 1-1-4，直线 l_1，l_2，l_3 都经过点 $P(3, 2)$，又 l_1，l_2，l_3 分别经过点 $Q_1(-2, -1)$，$Q_2(4, -2)$，$Q_3(-3, 2)$，试计算直线 l_1，l_2，l_3 的斜率.

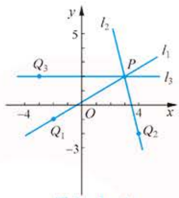


图 1-1-4

解 设 k_1，k_2，k_3 分别表示直线 l_1，l_2，l_3 的斜率，则

$$k_1=\frac{-1-2}{-2-3}=\frac{3}{5},\ k_2=\frac{-2-2}{4-3}=-4,\ k_3=\frac{2-2}{-3-3}=0.$$

由图 1-1-4 可以看出：

(1) 当直线的斜率为正时，直线从左下方向右上方倾斜；

(2) 当直线的斜率为负时，直线从左上方向右下方倾斜；

(3) 当直线的斜率为零时，直线与 x 轴平行或重合.

例 2 经过点(3, 2)画直线，使直线的斜率分别为

(1) $\frac{3}{4}$； (2) $-\frac{4}{5}$.

分析 要画出直线，只需再确定直线上另一个点的位置.

解 (1) 根据

$$\text{斜率}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

斜率为$\frac{3}{4}$表示直线上的任一点沿 x 轴方向向右平移 4 个单位长度，再沿 y 轴方向向上平移 3 个单位长度后仍在此直线上.

如果我们从点(3, 2)开始，向右平移 4 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，就得到点(7, 5).

因此，通过点(7, 5)和点(3, 2)画直线，即为所求(图 1-1-5(1)).

(2) 由于 $-\frac{4}{5}=\frac{-4}{5}$，因此，将点(3, 2) 先向右平移 5 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度，得到点(8, −2). 通过点(8, −2) 和点(3, 2) 画直线，即为所求(图 1-1-5(2)).

由于$-\frac{4}{5}=\frac{4}{-5}$，因此也可以将点(3, 2)先向左平移 5 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度，得到点(−2, 6). 再通过点(−2, 6)和点(3, 2)画直线，即为所求. 还有其他作法吗？为什么？

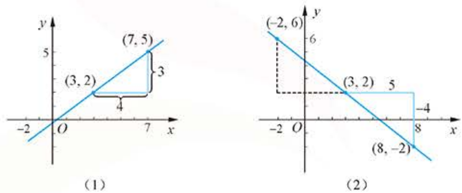


图 1-1-5

在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线，把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到与直线重合时，所转过的最小正角 α 也能刻画直线的倾斜程度，我们把这个角 α 称为这条直线的**倾斜角**(angle of inclination)，并规定：

与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为 0.

由定义可知，直线的倾斜角 α 的取值范围是

$$\{\alpha \mid 0 \leqslant \alpha < \pi\}.$$

当直线的斜率为正时，直线的倾斜角为锐角(图 1-1-6(1))，此时，

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{NB}{AN}=\tan\alpha.$$

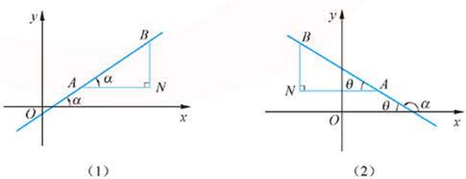


图 1-1-6

当直线的斜率为负时，直线的倾斜角为钝角（图 1－1－6(2)），此时，

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{NB}{-AN}=-\tan\theta=-\tan(\pi-\alpha)=\tan\alpha.$$

因此，当直线与 x 轴不垂直时，该直线的斜率 k 与倾斜角 α 之间的关系为

$$k=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

信息技术

在 GGB 中任画一条直线 AB，度量直线 AB 的斜率，以及直线 AB 与 x 轴形成的倾斜角 α（图 1－1－7）. 拖动点 B，观察斜率与倾斜角变化的规律.

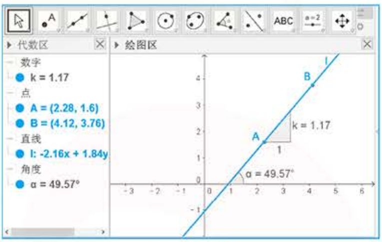


图 1－1－7

练　习

1. 分别求经过下列两点的直线的斜率：

(1) (2, 3), (4, 5)；　　(2) (−2, 3), (2, 1)；

(3) (−3, −1), (2, −1)；　　(4) (1, 0), (0, −2).

2. 分别求经过下列两点的直线的斜率和倾斜角：

(1) (−1, 2), (−2, 1)；　　(2) $(-1, 3)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$；

(3) $(3, \sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{3})$；　　(4) $(a+1, a-1)$, (a, a).

3. 设过点 A 的直线的斜率为 k，分别根据下列条件写出直线上另一点 B 的坐标（答案不唯一）：

(1) $k=4$，$A(1, 2)$；　　(2) $k=-2$，$A(-2, -3)$；

(3) $k=-\frac{3}{2}$，$A(2, -4)$；　　(4) $k=\frac{4}{3}$，$A(-3, 2)$.

4. 根据下列条件，分别画出经过点 P，且斜率为 k 的直线：

(1) $P(1, 2)$，$k=3$；　　(2) $P(2, 4)$，$k=-\frac{3}{4}$；

(3) $P(-1, 3)$，$k=0$；　　(4) $P(-2, 0)$，斜率不存在.

5. 分别判断下列三点是否在同一直线上：

(1) (0, 2), (2, 5), (3, 7)；

(2) (−1, 4), (2, 1), (−2, 5)；

(3) (1, 2), (1, 3), (1, −1).

习题 1.1

感受・理解

1. 分别求经过下列两点的直线的斜率：

(1) (−3, 2), (2, −1)； (2) (2, 0), (0, −4)；

(3) (2, 1), (3, 1)； (4) (a, a), $(a-1, a+3)$.

2. 设 x, y 为实数，已知直线的斜率 $k=2$，且 $A(3, 5)$, $B(x, 7)$, $C(-1, y)$ 是这条直线上的三个点，求 x 和 y 的值.

3. (1) 当实数 m 为何值时，经过两点 $A(-m, 6)$, $B(1, 3m)$ 的直线的斜率是 12?

(2) 当实数 m 为何值时，经过两点 $A(m, 2)$, $B(-m, -2m-1)$ 的直线的倾斜角是 60°?

(3) 当实数 m 为何值时，经过两点 $A(1, m)$, $B(m-1, 3)$ 的直线的倾斜角是钝角?

4. 已知直线 l 上一点向右平移 4 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度后，仍在该直线上，求直线 l 的斜率 k.

5. 设 m 为实数，若 $A(1, 2)$, $B(3, m)$, $C(7, m+2)$ 三点共线，求 m 的值.

思考・运用

6. 已知 a, b, c 是两两不相等的实数，分别求经过下列两点的直线的倾斜角：

(1) $A(a, c)$, $B(b, c)$； (2) $A(a, b)$, $B(a, c)$；

(3) $A(b, b+c)$, $B(a, c+a)$.

7. 设 m 为实数，过两点 $A(m^2+2, m^2-3)$, $B(3-m-m^2, 2m)$ 的直线 l 的倾斜角为 45°，求 m 的值.

8. 经过点 $P(0, -1)$ 作直线 l，且直线 l 与连接点 $A(1, -2)$, $B(2, 1)$ 的线段总有公共点，求直线 l 的倾斜角 α 和斜率 k 的取值范围.

探究・拓展

9. 如图，"坡度"常用来刻画道路的倾斜程度，这个词与直线的斜率有何关系? 坡度为 4% 的道路很陡吗? 调查一些山路或桥面的坡度，并与同学交流.

（第 9 题）

1.2 直线的方程

在平面直角坐标系中,若已知直线 l 上一点 $P_1(x_1, y_1)$ 和直线 l 的斜率 k,或者已知直线 l 上不同的两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,则直线 l 唯一确定.

在上述两种情况下,当点 $P(x, y)$ 在直线 l 上运动时,点 P 的坐标应该满足某种关系.

● 如何得到直线 l 上点 $P(x, y)$ 的坐标 x, y 之间的关系?

1.2.1 直线的点斜式方程

直线 l 经过点 $A(-1, 3)$,斜率为 -2(图 1-2-1(1)). 如果点 $P(x, y)$ 在直线 l 上运动,那么,

● x, y 满足什么关系?

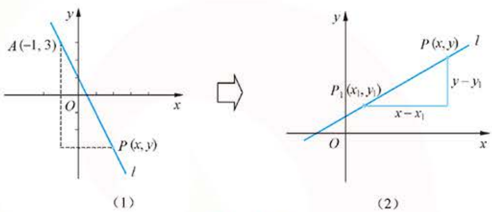


图 1-2-1

当点 $P(x, y)$ 在直线 l 上运动时(除点 A 外),点 P 与定点 $A(-1, 3)$所确定的直线的斜率恒等于-2,

所以 $$\frac{y-3}{x-(-1)}=-2,$$

因此 $$y-3=-2[x-(-1)].$$

显然,点 $A(-1, 3)$的坐标也满足此方程.

因此,当点 P 在直线 l 上运动时,其坐标 (x, y) 满足方程

$$y-3=-2[x-(-1)],$$

即

$$2x+y-1=0.$$

反过来，若点 $P'(x', y')$ 的坐标满足方程 $2x+y-1=0$，即 $2x'+y'-1=0$.

当 $x'=-1$ 时，$y'=3$，此时点 P' 与点 A 重合，即点 P' 在直线 l 上.

当 $x'\neq -1$ 时，$y'-3=-2[x'-(-1)]$，即 $\dfrac{y'-3}{x'-(-1)}=-2$，这表明过点 P'，A 的直线的斜率为 -2，从而点 P' 在直线 l 上.

因此，以方程 $2x+y-1=0$ 的解为坐标的点 (x, y) 也都在直线 l 上.

综上，当点 P 在直线 l 上时，其坐标 (x, y) 满足方程 $2x+y-1=0$，并且以方程 $2x+y-1=0$ 的解 x，y 为坐标的点 (x, y) 都在直线 l 上. 这时，我们将方程 $2x+y-1=0$ 称为直线 l 的方程，也称直线 l 为方程 $2x+y-1=0$ 的直线.

一般地，当点 P 在曲线 C 上时，其坐标 (x, y) 满足方程 $F(x, y)=0$，并且以方程 $F(x, y)=0$ 的解为坐标的点 (x, y) 都在曲线 C 上. 这时，我们将方程 $F(x, y)=0$ 称为曲线 C 的方程，也称曲线 C 为方程 $F(x, y)=0$ 的曲线.

一般地，如果直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$，斜率为 k，那么，如何建立直线 l 的方程呢？

如图 1-2-1(2)，设直线 l 上任意一点 P 的坐标是 (x, y).

当点 $P(x, y)$（不同于点 P_1）在直线 l 上运动时，直线 PP_1 的斜率恒等于 k，即

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k,$$

故

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (*)$$

因为点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标也满足方程(*)，所以直线 l 上的每个点的坐标都是这个方程的解；反过来，可以验证，以方程(*)的解为坐标的点都在直线 l 上. 因此，方程(*)就是过点 P_1，斜率为 k 的直线 l 的方程.

方程

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

叫作直线的**点斜式方程**(equation of point slope form).

当直线 l 与 x 轴垂直时，斜率不存在，其方程不能用点斜式表示. 但因为 l 上每一点的横坐标都等于 x_1，所以它的方程是

$$x=x_1.$$

例 1 已知一直线经过点 $P(-2, 3)$，斜率为 2，求这条直线的方程.

解 由直线的点斜式方程，得所求直线的方程为

$$y-3=2(x+2),$$

即

$$2x-y+7=0.$$

例 2 已知直线 l 的斜率为 k，与 y 轴的交点是 $P(0, b)$，求直线 l 的方程.

解 由直线的点斜式方程，得直线 l 的方程为

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$y=kx+b.$$

我们把直线 l 与 y 轴的交点 $(0,b)$ 的纵坐标 b 称为直线 l 在 y 轴上的**截距**(intercept). 这个方程由直线 l 的斜率和它在 y 轴上的截距确定，所以这个方程也叫作直线的**斜截式方程**(equation of slope intercept form).

这说明，初中学习的一次函数 $y=kx+b$，它的图象确实是一条直线，其中常数 k 是直线的斜率，常数 b 就是直线在 y 轴上的截距.

探 究

在同一直角坐标系中作出直线

$$y=2,\ y=x+2,\ y=-x+2,\ y=3x+2,\ y=-3x+2,$$

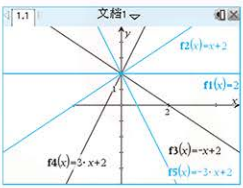
根据图 1-2-2(1)，你能推测直线 $y=kx+2$ 有什么特点吗？

在同一直角坐标系中作出直线

$$y=2x,\ y=2x+1,\ y=2x-1,\ y=2x+4,\ y=2x-4,$$

根据图 1-2-2(2)，你能推测直线 $y=2x+b$ 有什么特点吗？

尝试用计算器或计算机作出这些直线.



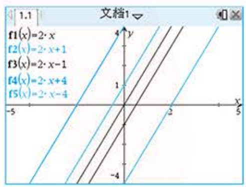
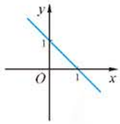


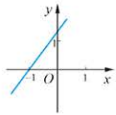
图 1-2-2

练 习

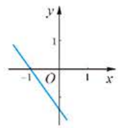
1. 根据下列条件，分别写出直线的方程：
   (1) 经过点 $(4, -2)$，斜率为 3；
   (2) 经过点 $(3, 1)$，斜率为 $\frac{1}{2}$；
   (3) 经过点 $(2, 0)$，斜率为 -1；
   (4) 经过点 $(0, -1)$，斜率为 0；
   (5) 斜率为 -2，在 y 轴上的截距为 -2；
   (6) 斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，与 x 轴交点的横坐标为 -7.
2. 直线 $y=k(x+1)\ (k>0)$ 可能是(　　).



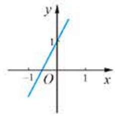
A.



B.



C.



D.

3. 根据下列条件，分别写出直线的方程：

(1) 过点 $P(-\sqrt{3},\ 3)$，倾斜角为 $30°$；

(2) 过点 $P(-4,\ -3)$，倾斜角为 $135°$；

(3) 过点 $P(0,\ 4)$，倾斜角为 $0°$；

(4) 过点 $P(3,\ 2)$，倾斜角为 $90°$.

4. 已知直线 l_1：$y=-2x+3$. 直线 l_2 过点 $P(1,2)$，且它的斜率与直线 l_1 的斜率相等. 写出直线 l_2 的方程，并在同一直角坐标系中画出直线 l_1 和 l_2.

5. 分别写出经过下列两点的直线的方程：

(1) $P(1,\ 2)$，$Q(-1,\ 4)$；

(2) $P(1,\ 0)$，$Q(0,\ 2)$.

6. 任一条直线都可以用点斜式方程表示吗？斜截式方程可以改写成点斜式方程吗？

1.2.2 直线的两点式方程

若直线 l 经过两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，则直线 l 唯一确定. 那么，

● 如何建立直线 l 的方程呢？

如果 $x_1 \neq x_2$，那么直线 l 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. 由直线的点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

当 $y_1 \neq y_2$ 时，方程可以写成

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

这个方程是由直线上两点确定的.

还有其他方法可以得到直线的两点式方程吗？

方程

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

叫作直线的**两点式方程**(equation of two-point form).

当 $y_1=y_2$ 时，由 $x_1\neq x_2$ 知直线 l 与 y 轴垂直，它的方程为 $y=y_1$.

如果 $x_1=x_2$，那么 $y_1\neq y_2$，直线 l 与 x 轴垂直，它的方程为 $x=x_1$.

思考

(1) 方程 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的左、右两边各具有怎样的几何意义？它表示什么图形？

(2) 方程$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$和方程$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$表示同一图形吗？

例 3 已知直线 l 经过两点 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$（图 1-2-3），其中 $a\neq0$，$b\neq0$，求直线 l 的方程.

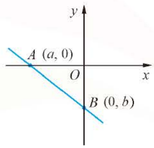


图 1-2-3

解 直线 l 经过两点 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$，其中 $a\neq0$，$b\neq0$，由直线的两点式方程，得直线 l 的方程为

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

当直线 l 经过原点时，l 在 x 轴和 y 轴上的截距都为 0.

我们把直线 l 与 x 轴的交点 $(a,0)$ 的横坐标 a 称为直线 l 在 x 轴上的截距，此时直线 l 在 y 轴上的截距为 b. 方程$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 由直线在 x 轴和 y 轴上的非零截距所确定，所以这个方程也叫作直线的**截距式方程**(equation of intercept form).

例 4 已知三角形的顶点是 $A(-5,\ 0)$，$B(3,\ -3)$，$C(0,\ 2)$（图 1-2-4），分别求这个三角形三边所在直线的方程.

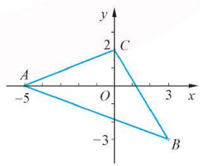


图 1-2-4

解 直线 AB 过 $A(-5, 0)$，$B(3, -3)$两点，由直线的两点式方程，得

$$\frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-(-5)}{3-(-5)},$$

即 $$3x+8y+15=0,$$

这就是直线 AB 的方程.

直线 BC 在 y 轴上的截距为 2，斜率是

$$k=\frac{2-(-3)}{0-3}=-\frac{5}{3},$$

由直线的斜截式方程，得

$$y=-\frac{5}{3}x+2,$$

即 $$5x+3y-6=0,$$

这就是直线 BC 的方程.

直线 AC 在x 轴、y 轴上的截距分别是-5，2，由直线的截距式方程，得

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1,$$

即 $$2x-5y+10=0,$$

这就是直线 AC 的方程.

练　习

1. 分别写出经过下列两点的直线的方程：

(1) $(1, 3)$，$(-1, 2)$；　(2) $(2, 3)$，$(0, 2)$；

(3) $(3, 3)$，$(3, 4)$；　(4) $(-2, 3)$，$(3, 3)$；

(5) $(0, 3)$，$(-2, 0)$；　(6) $(2, 0)$，$(0, -2)$.

2. 根据下列条件，分别写出直线的方程：

(1) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 3，-4；

(2) 过点 $P(1, 5)$，且在 y 轴上的截距为 6；

(3) 过点 $P(-3, 4)$，且在 x 轴上的截距为 3.

3. 已知两点 $A(3, 2)$，$B(8, 12)$.

(1) 求直线 AB 的方程；

(2) 设 a 为实数，若点 $C(-2, a)$在直线 AB 上，求 a 的值.

4. 回答下列问题：

(1) 如果两条直线有相同的斜率，但在 x 轴上的截距不同，那么它们在 y 轴上的截距可能相同吗？

(2) 如果两条直线在 y 轴上的截距相同，但是斜率不同，那么它们在 x 轴上的截距可能相同吗？

(3) 任一条直线都可以用截距式方程表示吗？

1.2.3 直线的一般式方程

我们已经学习了直线方程的几种特殊形式，它们都是关于 x，y 的二元一次方程，那么，

● 任意一条直线的方程都是关于 x，y 的二元一次方程吗？

事实上，在平面直角坐标系中，直线可以分成两类：一类是与 x 轴不垂直的直线，另一类是与 x 轴垂直的直线.

当直线与 x 轴不垂直时，直线的斜率存在，于是经过点 $P_1(x_1,y_1)$，斜率为 k 的直线的方程为 $y-y_1=k(x-x_1)$，即

$$kx-y+y_1-kx_1=0,$$

此方程是关于 x，y 的二元一次方程.

当直线与 x 轴垂直时，直线的斜率不存在，于是经过点 $P_1(x_1,y_1)$ 的直线的方程为 $x=x_1$，即

$$x+0\times y-x_1=0,$$

此方程也可看作是关于 x，y 的二元一次方程.

在平面直角坐标系中，动点由横坐标、纵坐标决定，所以方程 $x=x_1$ 也可以看成二元一次方程.

因此，平面直角坐标系中的任意一条直线的方程都可以用关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$ (A，B 不全为 0)来表示.

反过来，关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$ (A，B 不全为 0)都表示平面直角坐标系中的一条直线吗？

显然，当 $B\neq 0$ 时，方程 $Ax+By+C=0$ 可以写成

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它表示斜率为 $-\frac{A}{B}$，在 y 轴上的截距为 $-\frac{C}{B}$ 的直线.

当 $B=0$ 时，$A\neq 0$，方程 $Ax+By+C=0$ 可以写成

$$x=-\frac{C}{A},$$

它表示垂直于 x 轴的直线.

因此，在平面直角坐标系中，任何一个关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$ (A，B 不全为 0)都表示一条直线.

方程(*)也称为关于 x, y 的线性方程.

方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B\text{不全为}0) \qquad (*)$$

叫作直线的**一般式方程**(equation of general form).

例5 求直线

$$l: 3x+5y-15=0$$

的斜率以及它在 x 轴、y 轴上的截距,并作图.

解 将直线 l 的方程 $3x+5y-15=0$ 写成

$$y=-\frac{3}{5}x+3,$$

因此,直线 l 的斜率为

$$k=-\frac{3}{5}.$$

在方程 $3x+5y-15=0$ 中,当 $x=0$ 时, $y=3$;当 $y=0$ 时, $x=5$. 所以,直线 l 在 y 轴上的截距为3,在 x 轴上的截距为5.

过两点(5, 0), (0, 3)作直线,就得到直线 l (图1-2-5).

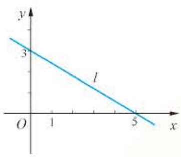


图1-2-5

例6 设 m 为实数,若直线 l 的方程为

$$x+my-2m+6=0,$$

根据下列条件分别确定 m 的值:

(1) 直线 l 在 x 轴上的截距是 -3;

(2) 直线 l 的斜率是1.

解 (1) 令 $y=0$,得 $\quad x=2m-6.$

由题意知 $\qquad 2m-6=-3,$

解得 $\qquad m=\frac{3}{2}.$

(2) 因为直线 l 的斜率存在,所以 $m\neq 0$,于是直线 l 的方程化为

$$y=-\frac{1}{m}x+\frac{2m-6}{m}.$$

由题意知 $\qquad -\frac{1}{m}=1,$

解得 $\qquad m=-1.$

练 习

1. 分别写出下列直线的斜率以及它们在 x 轴、y 轴上的截距：

(1) $x+2y=4$；　　(2) $y=\frac{1}{2}(x+3)$；

(3) $y-1=-3(x-2)$；　　(4) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

2. 设直线 $5x-2y-10=0$ 在 x 轴上的截距为 a，在 y 轴上的截距为 b，则（　　）.

A. $a=2,\ b=5$　　B. $a=2,\ b=-5$

C. $a=-2,\ b=5$　　D. $a=-2,\ b=-5$

3. 设 m 为实数，若直线 l 的方程为 $mx+(m-1)y+3=0$，根据下列条件分别确定 m 的值：

(1) 直线 l 在 y 轴上的截距为 6；　　(2) 直线 l 的斜率为 2；

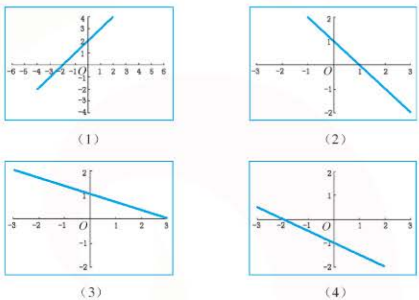
(3) 直线 l 垂直于 x 轴；　　(4) 直线 l 经过点 $(1,\ 3)$.

4. 设 A，B，C 为实数，且 A，B 不同时为 0. 若直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，根据下列条件，分别求出 A，B，C 应满足的条件：

(1) 直线 l 过原点；　　(2) 直线 l 垂直于 x 轴；

(3) 直线 l 垂直于 y 轴；　　(4) 直线 l 与两条坐标轴都相交.

5. 写出下列图中各条直线的方程，并化为一般式：



（第 5 题）

习题 1.2

感受・理解

1. 分别写出下列直线的斜率以及它们在 x 轴、y 轴上的截距：

(1) $2x+y-4=0$；　　(2) $3x-6y+10=0$.

2. 根据下列条件，分别写出直线的方程：

(1) 过点 $(3,\ -2)$，斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(2) 过点 $(-3,\ 0)$，与 x 轴垂直；

(3) 斜率为 -4，在 y 轴上的截距为 7；

(4) 斜率为 3，在 x 轴上的截距为 -2；

(5) 过点 $(-1,\ 8)$，$(4,\ -2)$；

(6) 过点(2, 0), (0, -3).

3. 写出过点 $P(3, 1)$,且分别满足下列条件的直线 l 的方程:

(1) 垂直于 x 轴;

(2) 垂直于 y 轴;

(3) 过原点;

(4) 与直线 $x+2y-3=0$ 的斜率相等.

4. 分别求下列直线与两坐标轴围成的三角形的面积:

(1) $x+y-2=0$;

(2) $2x-3y-6=0$;

(3) $5x+3y+2=0$.

5. 一根弹簧挂 4 kg 的物体时,长 20 cm. 在弹性限度内,所挂物体的质量每增加 1 kg,弹簧伸长 1.5 cm. 试写出弹簧的长度 l(单位: cm)和所挂物体质量 m(单位: kg)之间的关系.

6. 一根铁棒在 40℃时长 12.506 m,在 80℃时长 12.512 m. 已知铁棒的长度 l(单位: m)和温度 t(单位: ℃)之间的关系可以用直线方程来表示,试求出这个方程,并根据这个方程求出这根铁棒在 100℃时的长度.

7. 已知菱形的两条对角线长分别为 8 和 6,以菱形的中心为坐标原点,较长对角线所在的直线为 x 轴,建立直角坐标系,求出菱形各边所在直线的方程.

8. 已知直线 l 经过点(3, -1),且与两条坐标轴围成一个等腰直角三角形,求直线 l 的方程.

思考·运用

9. 设 k 为实数,若直线 l 的方程为 $2x+(k-3)y-2k+6=0\ (k\neq 3)$,根据下列条件分别确定 k 的值:

(1) 直线 l 的斜率为 -1;

(2) 直线 l 在 x 轴、y 轴上截距之和等于 1.

10. 已知点 $P_0(x_0, y_0)$不在直线 l_1: $2x+3y+4=0$ 上,直线 l_2过点 $P_0(x_0, y_0)$,且它的斜率与直线 l_1的斜率相等,证明: 直线 l_2的方程可以写成 $2(x-x_0)+3(y-y_0)=0$.

11. 已知直线 l 过点 $P(2, 3)$, 根据下列条件分别求直线 l 的方程:

(1) l 在 x 轴、y 轴上的截距之和等于 0;

(2) l 与两条坐标轴在第一象限所围成的三角形的面积为 16.

探究·拓展

12. 设直线 l 的方程为 $y-3=k(x+2)$, 当 k 取任意实数时,这样的直线具有什么共同的特点?

13. 已知两条直线 $a_1x+b_1y+1=0$ 和 $a_2x+b_2y+1=0$ 都过点 $A(1, 2)$,求过两点 $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$ 的直线的方程.

1.3 两条直线的平行与垂直

在平面直角坐标系中，直线的斜率刻画了直线的倾斜程度，而两条直线平行或垂直的位置关系与它们的倾斜程度密切相关. 那么，

● 怎样通过直线的斜率来判断两条直线平行或垂直的位置关系呢?

首先我们研究两条直线平行的情形.

当直线 l_1，l_2 的斜率均存在时，设直线 l_1，l_2 的斜截式方程分别为

$$l_1: y = k_1x + b_1,$$

$$l_2: y = k_2x + b_2,$$

它们的倾斜角分别是 α_1，α_2.

如果直线 $l_1 // l_2$（图 1－3－1(1)），那么它们的倾斜角相等，

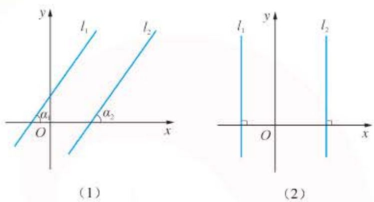


图 1－3－1

即 $$\alpha_1 = \alpha_2,$$

所以 $$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2,$$

从而 $$k_1 = k_2.$$

反之，如果 $k_1 = k_2$，那么

$$\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2.$$

因为 $0 \leqslant \alpha_1 < \pi$，$0 \leqslant \alpha_2 < \pi$，根据正切函数的性质可知

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

从而 $$l_1 // l_2.$$

因此，当两条直线的斜率都存在时，如果它们互相平行，那么它们的斜率相等；反之，如果两条直线的斜率相等，那么它们互相平行.

这里 l_1，l_2 指不重合的两条直线.

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 均存在}).$$

如果直线 l_1，l_2 的斜率都不存在，那么它们都与 x 轴垂直，所以 $l_1 /\!/ l_2$（图 1-3-1(2)）.

例 1 证明：顺次连接 $A(2, -3)$，$B\left(5, -\frac{7}{2}\right)$，$C(2, 3)$，$D(-4, 4)$ 四点所得的四边形是梯形（图 1-3-2）.

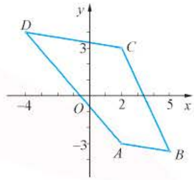


图 1-3-2

分析 要证明一个四边形是梯形，即要证明该四边形的一组对边平行，另一组对边不平行.

证明 因为

$$k_{AB} = \frac{-\frac{7}{2}-(-3)}{5-2} = -\frac{1}{6},$$

$$k_{CD} = \frac{4-3}{-4-2} = -\frac{1}{6},$$

所以 $$k_{AB} = k_{CD},$$

从而 $$AB /\!/ CD.$$

又因为 $$k_{BC} = \frac{3-\left(-\frac{7}{2}\right)}{2-5} = -\frac{13}{6},$$

$$k_{DA} = \frac{-3-4}{2-(-4)} = -\frac{7}{6},$$

所以 $$k_{BC} \neq k_{DA},$$

从而直线 BC 与 DA 不平行.

因此，四边形 $ABCD$ 是梯形.

例 2 判断下列各组直线是否平行，并说明理由：

(1) l_1：$y = 2x + 1$，　l_2：$y = 2x - 1$；

(2) l_1：$2x - y - 7 = 0$，　l_2：$x + 2y - 1 = 0$.

解 设直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2.

(1) 由直线 l_1, l_2 的方程可知

$$k_1 = 2, k_2 = 2,$$

所以 $$k_1 = k_2.$$

又直线 l_1, l_2 在 y 轴上的截距分别为 1 和 -1，所以 l_1 与 l_2 不重合，从而 $$l_1 \parallel l_2.$$

(2) 由直线 l_1，l_2 的方程可知

$$k_1 = 2,\ k_2 = -\frac{1}{2},$$

所以 $k_1 \neq k_2$，从而 l_1 与 l_2 不平行.

例 3 求过点 $A(2, -3)$，且与直线

$$2x + y - 5 = 0$$

平行的直线的方程.

解 已知直线的斜率是 -2，因为所求直线与已知直线平行，所以所求直线的斜率也是 -2.

根据直线的点斜式方程，得所求直线的方程为

$$y + 3 = -2(x - 2),$$

即

$$2x + y - 1 = 0.$$

练 习

1. 分别根据下列各点的坐标，判断各组中直线 AB 与 CD 是否平行：
   (1) $A(3, -1)$，$B(-1, 1)$，$C(-3, 5)$，$D(5, 1)$；
   (2) $A(2, -4)$，$B(-\sqrt{3}, -4)$，$C(0, 1)$，$D(4, 1)$；
   (3) $A(2, 3)$，$B(2, -1)$，$C(-1, 4)$，$D(-1, 1)$；
   (4) $A(-1, -2)$，$B(2, 1)$，$C(3, 4)$，$D(-1, -1)$.
2. 已知点 $A(-4, -2)$，$B(1, -1)$，$C(5, 5)$，$D\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right)$，求证：四边形 $ABCD$ 是梯形.
3. 判断下列各组直线是否平行，并说明理由：
   (1) l_1：$y = -x + 1$，　　l_2：$y = -x + 3$；
   (2) l_1：$3x - 2y - 1 = 0$，　　l_2：$6x - 4y - 1 = 0$；
   (3) l_1：$2x - 5y - 7 = 0$，　　l_2：$5x - 2y - 1 = 0$；
   (4) l_1：$y - 2 = 0$，　　l_2：$y + 1 = 0$.
4. 分别求过点 $A(2, 3)$，且平行于下列直线的直线的方程：
   (1) $2x + 5y - 3 = 0$；
   (2) $4x - y = 0$；
   (3) $x - 5 = 0$；
   (4) $y + 6 = 0$.

下面我们研究两条直线垂直的情形.

如图 1-3-3,如果直线 $l_1 \perp l_2$(l_1, l_2 都不与 x 轴垂直),那么直线 l_1, l_2的倾斜角 α_1, α_2 中必定一个是锐角,另一个是钝角. 不妨设 α_2 是钝角,则

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2},$$

从而

$$k_2 = \tan\alpha_2 = \tan\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{k_1},$$

即

$$k_1 k_2 = -1.$$

你能用其他方法得到这一结果吗?

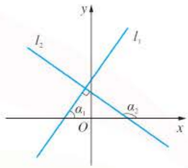


图 1-3-3

反过来,如果

$$k_1 k_2 = -1,$$

那么可以证明 $l_1 \perp l_2$ (注:留作习题1.3第8题).

因此,当两条直线的斜率都存在时,如果它们互相垂直,那么它们斜率的乘积等于-1;反之,如果它们斜率的乘积等于-1,那么它们互相垂直.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1 \quad (k_1, k_2 \text{ 均存在}).$$

思 考

如果两条直线 l_1, l_2 中的一条的斜率不存在,那么何时这两条直线互相垂直?

例 4 (1) 已知四点 $A(5, 3)$, $B(10, 6)$, $C(3, -4)$, $D(-6, 11)$,求证: $AB \perp CD$;

(2) 已知直线 l_1: $3x+5y-10=0$, l_2: $15x-9y+8=0$,求证: $l_1 \perp l_2$.

证明 (1) 由斜率公式,得

$$k_{AB} = \frac{6-3}{10-5} = \frac{3}{5}, \quad k_{CD} = \frac{11-(-4)}{-6-3} = -\frac{5}{3},$$

则

$$k_{AB} k_{CD} = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -1,$$

所以

$$AB \perp CD.$$

(2) 由 l_1，l_2 的方程可知，它们的斜率 $k_1=-\frac{3}{5}$，$k_2=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$，

从而
$$k_1k_2=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{3}=-1,$$

所以
$$l_1\perp l_2.$$

例 5 如图 1－3－4，已知三角形的顶点为 $A(2,\ 4)$，$B(1,\ -2)$，$C(-2,\ 3)$，求 BC 边上的高 AD 所在直线的方程.

解 直线 BC 的斜率为
$$k_{BC}=\frac{3-(-2)}{-2-1}=-\frac{5}{3}.$$

因为 $AD\perp BC$，

所以
$$k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}=\frac{3}{5}.$$

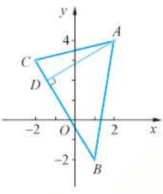


图 1－3－4

根据直线的点斜式方程，得所求直线的方程为
$$y-4=\frac{3}{5}(x-2),$$

即
$$3x-5y+14=0.$$

例 6 在路边安装路灯，路宽 23 m，灯杆长 2.5 m，且与灯柱成 120°角. 路灯采用锥形灯罩，灯罩轴线与灯杆垂直. 当灯柱高为多少米时，灯罩轴线正好通过道路路面的中线(精确到 0.01 m)？

解 如图 1－3－5，记灯柱顶端为 B，灯罩顶为 A，灯杆为 AB，灯罩轴线与道路中线交于点 C，灯柱的高为 h m. 以灯柱底端 O 点为原点，灯柱 OB 所在直线为 y 轴，建立如图所示的直角坐标系.

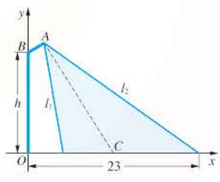


图 1－3－5

点 B 的坐标为 $(0,\ h)$，点 C 的坐标为 $(11.5,\ 0)$. 因为 $\angle OBA=120°$，所以直线 BA 的倾斜角为 30°，从而点 A 的坐标为
$$(2.5\cos 30°,\ h+2.5\sin 30°),$$

即
$$(1.25\sqrt{3},\ h+1.25).$$

因为 $CA \perp BA$，所以

$$k_{CA}=-\frac{1}{k_{BA}}=-\frac{1}{\tan 30^{\circ}}=-\sqrt{3},$$

从而直线 CA 的方程是

$$y-(h+1.25)=-\sqrt{3}(x-1.25\sqrt{3}).$$

又灯罩轴线 CA 过点 $C(11.5, 0)$，则

$$-(h+1.25)=-\sqrt{3}(11.5-1.25\sqrt{3}),$$

解得 $$h \approx 14.92.$$

答 灯柱高约为 14.92 m.

练 习

1. 分别根据下列各点的坐标，判断各组中直线 AB 与 CD 是否垂直：
   (1) $A(-1, -2)$，$B(1, 2)$，$C(-2, 1)$，$D(2, -1)$；
   (2) $A(0, 2)$，$B(1, 0)$，$C(3, 2)$，$D(5, 3)$；
   (3) $A(3, 4)$，$B(3, -2)$，$C(-1, 4)$，$D(1, 4)$；
   (4) $A(-3, 1)$，$B(1, 5)$，$C(2, 4)$，$D(0, 3)$.
2. 以点 $A(-1, 1)$，$B(2, -1)$，$C(1, 4)$ 为顶点的三角形是（　　）.
   A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形
3. 判断下列各组直线是否垂直，并说明理由：
   (1) l_1：$y=-2x+1$，　l_2：$y=\frac{1}{2}x+3$；
   (2) l_1：$3x-y-1=0$，　l_2：$2x+6y-1=0$；
   (3) l_1：$2x-5y-7=0$，　l_2：$5x-2y-1=0$；
   (4) l_1：$y-2=0$，　l_2：$x+1=0$.
4. 分别求过点 $A(2, 3)$，且垂直于下列直线的直线的方程：
   (1) $x-y-3=0$；　(2) $3x+2y-1=0$；
   (3) $x-1=0$；　(4) $y+2=0$.
5. 直线 l_1，l_2 的方程为
   $$l_1: 2x+3y-2=0,$$
   $$l_2: mx+(2m-1)y+1=0.$$
   设 m 为实数，分别根据下列条件求 m 的值：
   (1) $l_1 \parallel l_2$；　(2) $l_1 \perp l_2$.

习题 1.3

感受·理解

1. 判断下列各组直线是否平行，并说明理由：
   (1) l_1：$y=-\frac{1}{2}x+1$，　l_2：$y=-\frac{1}{2}x+3$；

(2) l_1: $3x+\sqrt{3}y-1=0$, l_2: $\sqrt{3}x+y-1=0$;

(3) l_1: $x+3y=3$, l_2: $y=-\dfrac{1}{3}x+1$;

(4) l_1: $x-2=0$, l_2: $5x+1=0$.

2. 判断下列各组直线是否垂直,并说明理由:

(1) l_1: $y=\sqrt{2}x+1$, l_2: $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+3$;

(2) l_1: $\sqrt{3}x-y-1=0$, l_2: $\sqrt{3}x+3y-1=0$;

(3) l_1: $3x+4y-7=0$, l_2: $4x+3y-1=0$;

(4) l_1: $3x+2=0$, l_2: $5x+8=0$.

3. 分别求满足下列条件的直线的方程:

(1) 过点 $A(3, 2)$,且与直线 $4x+y-2=0$ 平行;

(2) 过点 $B(3, 0)$,且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直;

(3) 过点$(5, 4)$,且与 x 轴垂直;

(4) 过点 $C(2, -3)$,且平行于过两点 $M(1, 2)$和 $N(-1, -5)$的直线.

4. 已知点 $A(-1, 3)$, $B(3, -2)$, $C(6, -1)$, $D(2, 4)$,求证:四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

5. 已知三角形的三个顶点是 $A(4, 0)$, $B(6, 7)$, $C(0, 3)$,求边 AB 上的高所在直线的方程.

6. 设 a 为实数,若直线 $ax+2ay+1=0$ 垂直于直线$(a-1)x-(a+1)y-1=0$,求 a 的值.

思考·运用

7. (1) 已知直线 l: $Ax+By+C=0$,其中 A, B 不全为 0,且直线 $l_1 \parallel l$,求证:直线 l_1 的方程总可以写成 $Ax+By+C_1=0$ $(C_1 \neq C)$;

(2) 已知直线 l: $Ax+By+C=0$,其中 A, B 不全为 0,且直线 $l_2 \perp l$,求证:直线 l_2 的方程总可以写成 $Bx-Ay+C_2=0$.

8. 证明:如果两条直线斜率的乘积等于-1,那么这两条直线互相垂直.

9. (1) 已知直线 l 过点 $P(x_0, y_0)$,且与直线 l_1: $Ax+By+C=0$(P 不在 l_1 上)平行,其中 A,B 不全为 0,求证:直线 l 的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$;

(2) 已知直线 l 过点 $P(x_0, y_0)$,且与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直,其中 A, B 不全为 0,求证:直线 l 的方程为 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$.

探究·拓展

10. 已知两条直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 $(0<k_1<k_2)$,设 l_1, l_2 的夹角(锐角)为 θ.

(1) 求证:$\tan\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$;

(2) 求直线 $2x-y+1=0$ 与直线 $x-3y-3=0$ 的夹角 θ.

1.4 两条直线的交点

我们已经知道，在平面直角坐标系中，任何一条直线都可以用方程来表示，那么，

● 能否用直线方程来研究两条直线的交点问题?

设两条直线的方程分别是

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\ l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如果这两条直线相交，由于交点同时在这两条直线上，交点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果这两个二元一次方程只有一个公共解，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 和 l_2 的交点.

据此，我们有

方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的解	一　组	无数组	无　解
直线 l_1, l_2 的公共点	一　个	无数个	零　个
直线 l_1, l_2 的位置关系	相　交	重　合	平　行

例 1　分别判断下列直线 l_1 与 l_2 是否相交. 若相交，求出它们交点的坐标：

(1) $l_1: 2x-y=7$,　　　$l_2: 3x+2y-7=0$;

(2) $l_1: 2x-6y+4=0$,　$l_2: 4x-12y+8=0$;

(3) $l_1: 4x+2y+4=0$,　$l_2: y=-2x+3$.

解　(1) 因为方程组

$$\begin{cases}2x-y-7=0,\\3x+2y-7=0\end{cases}$$

的解为

$$\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$$

所以直线 l_1 和 l_2 相交，且交点坐标为$(3, -1)$.

(2) 因为方程组

$$\begin{cases}2x-6y+4=0,\\4x-12y+8=0\end{cases}$$

有无数组解，所以直线 l_1 和 l_2 重合.

(3) 因为方程组

$$\begin{cases}4x+2y+4=0,\\2x+y-3=0\end{cases}$$

无解，所以 $l_1 \parallel l_2$.

例 2 设 a 为实数，直线 l_1：$2x+3y-1=0$，l_2：$x+(a-1)y+2=0$. 若 $l_1 \parallel l_2$，求 a 的值.

解法 1 因为 $l_1 \parallel l_2$，所以方程组

$$\begin{cases}2x+3y-1=0, & ①\\x+(a-1)y+2=0 & ②\end{cases}$$

无解.

由 ②×2－①，得 $(2a-5)y=-5$. ③

从而③无解，即

$$2a-5=0,$$

解得

$$a=\frac{5}{2}.$$

解法 2 由直线 l_1 的方程可知，它的斜率 $k_1=-\frac{2}{3}$.

因为 $l_1 \parallel l_2$，所以直线 l_2 的斜率存在，设为 k_2，且 $k_2=-\frac{2}{3}$.

又由直线 l_2 的方程可知，它的斜率 $k_2=-\frac{1}{a-1}$，

所以

$$-\frac{1}{a-1}=-\frac{2}{3},$$

解得

$$a=\frac{5}{2}.$$

例 3 已知直线 l 经过原点，且经过如下两条直线

$$2x+3y+8=0,\ x-y-1=0$$

的交点，求直线 l 的方程.

解 因为方程组

$$\begin{cases}2x+3y+8=0,\\x-y-1=0\end{cases}$$

的解为
$$\begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \end{cases}$$
所以两条直线 $2x+3y+8=0$ 和 $x-y-1=0$ 的交点坐标为 $(-1,-2)$，从而由题意知直线 l 经过点 $(-1,-2)$.

又直线 l 经过原点，所以直线 l 的方程为
$$\frac{y-0}{-2-0}=\frac{x-0}{-1-0},$$
即
$$2x-y=0.$$

思 考

已知直线
$$l_1: 2x+3y+8=0,$$
$$l_2: x-y-1=0,$$
则方程 $2x+3y+8+\lambda(x-y-1)=0$（λ 为任意实数）表示的直线有什么特点？

练 习

1. 与直线 $2x-y-3=0$ 相交的直线的方程是（　　）.

   A. $4x-2y-6=0$　　B. $y=2x$

   C. $y=2x+5$　　D. $y=-2x+3$

2. 判断下列各组直线 l_1 与 l_2 是否相交. 若相交，求出它们的交点.

   (1) l_1：$2x+y-3=0$，　l_2：$x+2y-3=0$；

   (2) l_1：$3x+4y-1=0$，　l_2：$6x+8y-3=0$.

3. 设 k 为实数，若三条直线 $2x+3y+8=0$，$x-y-1=0$ 和 $x+ky+k+\frac{1}{2}=0$ 相交于一点，则 k 的值为（　　）.

   A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知直线 l 过两条直线 $2x-3y-3=0$ 和 $x+y+2=0$ 的交点，且与直线 $3x+y-1=0$ 平行，求直线 l 的方程.

5. 已知直线 l 过两条直线 $x-y+2=0$ 和 $2x+y+1=0$ 的交点，且与直线 $x-3y-2=0$ 垂直，求直线 l 的方程.

习题 1.4

感受 · 理解

1. 判断下列各组直线 l_1 与 l_2 是否相交. 若相交，求出它们的交点.

   (1) l_1：$x-4y-1=0$，　l_2：$x+2y-4=0$；

   (2) l_1：$\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$，　l_2：$x+\sqrt{3}y+2=0$；

   (3) l_1：$\sqrt{2}x-3y-2=0$，　l_2：$2x-3\sqrt{2}y+1=0$.

2. 分别根据下列条件，求直线的方程：

   (1) 斜率为 -2，且过两条直线 $3x-y+4=0$ 和 $x+y-4=0$ 的交点；

(2) 过两条直线 $x-2y+3=0$ 和 $x+2y-9=0$ 的交点和原点；

(3) 过两条直线 $x-y+5=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 $3x-2y+4=0$；

(4) 过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$.

3. 设 a 为实数，若三条直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$ 和 $2x-y=10$ 相交于一点，求 a 的值.

4. 求两条互相垂直的直线 $2x+y+2=0$ 与 $ax+4y-2=0$ 的交点坐标.

5. 设 k 为实数，若直线 $y=kx+3$ 与直线 $y=\frac{1}{k}x-5$ 的交点在直线 $y=x$ 上，求 k 的值.

6. 设 m 为实数，已知两条直线 l_1：$(3+m)x+4y=5-3m$，l_2：$2x+(5+m)y=8$. 当 m 为何值时，l_1 与 l_2：

(1) 相交？ (2) 平行？

思考·运用

7. 设 a 为实数，若三条直线 $x+y+1=0$，$2x-y+8=0$ 和 $ax+3y-5=0$ 共有三个不同的交点，求 a 满足的条件.

8. 设 a 为实数，若三条直线 $x+y-1=0$，$2x+3y-5=0$ 和 $x-ay+8=0$ 共有两个不同的交点，求 a 的值.

探究·拓展

9. 已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$(A_1，B_1 不全为 0) 与直线 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$(A_2，B_2 不全为 0) 相交于点 P，求证：过点 P 的直线可以写成 $m(A_1x+B_1y+C_1)+n(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 的形式.

10. 直线 l_1 和 l_2 的方程分别是 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$，其中 A_1，B_1 不全为 0，A_2，B_2 也不全为 0.

(1) 当 $l_1 \parallel l_2$ 时，直线方程中的系数应满足什么关系？

(2) 当 $l_1 \perp l_2$ 时，直线方程中的系数应满足什么关系？

1.5 平面上的距离

在平面直角坐标系中，我们建立了点与坐标、直线与方程的对应关系，并据此研究了点与直线、直线与直线之间的位置关系，那么，

● 怎样借助点的坐标和直线的方程，来探求点与点、点与直线以及两平行直线之间的距离？

1.5.1 平面上两点间的距离

● 对于平面上的两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，如何求这两点间的距离？

我们先看一个具体的例子.

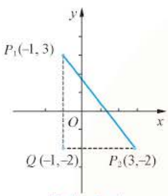


图 1-5-1

已知点 $P_1(-1, 3)$，$P_2(3, -2)$，下面探求 P_1，P_2 两点间的距离 P_1P_2.

如图 1-5-1，过点 P_1 向 x 轴作垂线，过点 P_2 向 y 轴作垂线，两条垂线交于点 Q，则 Q 点的坐标是$(-1, -2)$，且

$$QP_1 = |3-(-2)| = 5,\ QP_2 = |3-(-1)| = 4.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1QP_2$ 中，

$$P_1P_2^2 = QP_1^2 + QP_2^2 = 5^2 + 4^2 = 41.$$

因此，P_1，P_2 两点之间的距离为

$$P_1P_2 = \sqrt{41}.$$

一般地，如果 $x_1 \neq x_2$，$y_1 \neq y_2$，过点 P_1，P_2 分别向 y 轴、x 轴作垂线，两条垂线交于点 Q(图 1-5-2(1))，则点 Q 的坐标是(x_2, y_1)，且

x 轴上两点 $P_1(x_1, 0)$，$P_2(x_2, 0)$ 之间的距离可以表示为 $P_1P_2 = |x_2 - x_1|$. 当点 P_1 在点 P_2 的左侧时，$P_1P_2 = x_2 - x_1$.

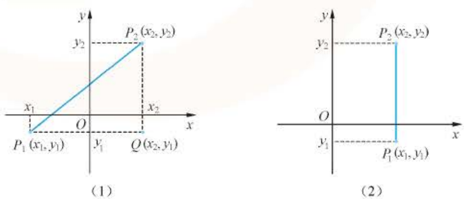


图 1-5-2

$$QP_1=|x_2-x_1|,\ QP_2=|y_2-y_1|.$$

在$\mathrm{Rt}\triangle P_1QP_2$中，

$$\begin{aligned}P_1P_2^{\,2}&=QP_1^{\,2}+QP_2^{\,2}\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.\end{aligned}\tag{*}$$

如果$x_1=x_2$(图 1-5-2(2)),那么

$$P_1P_2=|y_2-y_1|,$$

(*)式也成立.

如果$y_1=y_2$,那么

$$P_1P_2=|x_2-x_1|,$$

(*)式仍成立.

由此,我们得到平面上$P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$两点间的距离公式

能用其他方法得到这一结果吗?

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

例 1 (1) 求$A(-1,\ 3)$, $B(2,\ 5)$两点间的距离;

(2) 设a为实数,已知$A(0,\ 10)$, $B(a,\ -5)$两点间的距离是 17,求a的值.

解 (1) 由两点间距离公式,得

$$AB=\sqrt{[2-(-1)]^2+(5-3)^2}=\sqrt{13}.$$

(2) 由两点间距离公式,得

$$\sqrt{(a-0)^2+(-5-10)^2}=17,$$

解得

$$a=\pm 8.$$

故所求实数a的值为 8 或-8.

例 2 已知$\triangle ABC$的三个顶点为$A(-1,\ 5)$, $B(-2,\ -1)$, $C(4,\ 7)$,求BC边上的中线AM的长和AM所在直线的方程.

解 如图 1-5-3,设点M的坐标为$(x,\ y)$,过点B, M, C向x轴作垂线,垂足分别为点B', M', C',则点B', M', C'的横坐标分别为-2, x, 4.

因为点M是线段BC的中点,所以点M'是线段$B'C'$的中点,即$B'M'=M'C'$,从而

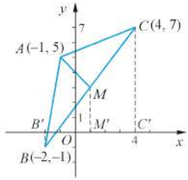


图 1-5-3

$$x-(-2)=4-x,$$

所以 $$x=\frac{(-2)+4}{2}=1.$$

同理可得 $$y=\frac{(-1)+7}{2}=3.$$

所以点 M 的坐标为(1, 3).

由两点间距离公式,得

$$AM=\sqrt{[1-(-1)]^2+(3-5)^2}=2\sqrt{2}.$$

因此,BC 边上的中线 AM 的长为 $2\sqrt{2}$.

由直线的两点式方程,得中线 AM 所在直线的方程为

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-1}{-1-1},$$

即 $$x+y-4=0.$$

对于平面上的两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,线段 P_1P_2 的中点是 $M(x_0, y_0)$,则

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

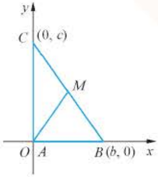


图 1-5-4

例 3 在直角三角形 ABC 中,点 M 为斜边 BC 的中点,试建立适当的直角坐标系,求证: $AM=\frac{1}{2}BC$.

证明 如图 1-5-4,以 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AB, AC 所在直线为坐标轴,建立直角坐标系.设 B, C 两点的坐标分别为 $(b, 0)$, $(0, c)$.

因为点 M 是 BC 的中点，所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{0+b}{2},\ \frac{0+c}{2}\right)$，即 $\left(\frac{b}{2},\ \frac{c}{2}\right)$.

由两点间距离公式，得

$$BC=\sqrt{(0-b)^2+(c-0)^2}=\sqrt{b^2+c^2},$$

$$AM=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{c}{2}-0\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}.$$

所以
$$AM=\frac{1}{2}BC.$$

练 习

1. 分别根据下列条件，求线段 AB 的长及线段 AB 中点的坐标：
   (1) $A(8,\ 10)$，$B(-4,\ 4)$；
   (2) $A(-\sqrt{3},\ \sqrt{2})$，$B(-\sqrt{2},\ \sqrt{3})$.
2. (1) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,\ 2)$，$B(1,\ 0)$，$C(2+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$，求 AB 边上的中线 CM 的长；
   (2) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(0,\ 1)$，$B(2,\ 5)$，$C(-4,\ 3)$，分别求三条中位线的长.
3. 已知两点 $P(1,\ -4)$，$A(3,\ 2)$，求点 A 关于点 P 的对称点 B 的坐标.
4. 证明：点 $M(1,\ 1)$ 与点 $N(5,\ -1)$ 关于直线 l：$2x-y-6=0$ 对称.

1.5.2 点到直线的距离

● 对于平面上确定的直线 l：$Ax+By+C=0$ (A，B 不全为 0) 和直线 l 外一点 $P(x_0,\ y_0)$，如何求点 P 到直线 l 的距离呢？

我们先看一个具体的例子.

已知点 $P(2,\ 4)$ 和直线 l：$5x+4y-7=0$，下面探求点 P 到直线 l 的距离.

如图 1-5-5，过点 P 作 $PE\perp l$，垂足为 E，则点 P 到直线 l 的距离就是线段 PE 的长.

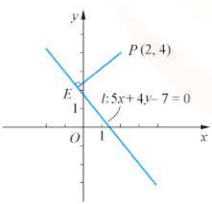


图 1-5-5

方法 1 通过求点 E 的坐标，用两点间距离公式求 PE.

第一步 由 $PE\perp l$，可知 PE 所在直线的斜率为 $\frac{4}{5}$；

第二步 写出 PE 所在直线的方程：$y-4=\frac{4}{5}(x-2)$，即 $4x-5y+12=0$；

第三步 由 l 和 PE 所在直线的方程联立方程组

$$\begin{cases}5x+4y-7=0,\\4x-5y+12=0,\end{cases}$$

解得垂足 E 的坐标为$\left(-\frac{13}{41},\ \frac{88}{41}\right)$；

第四步　利用两点间距离公式，求出点 P 到直线 l 的距离

$$PE=\sqrt{\left(-\frac{13}{41}-2\right)^2+\left(\frac{88}{41}-4\right)^2}=\frac{19\sqrt{41}}{41}.$$

方法 2　通过构造三角形，利用面积关系求点 P 到直线 l 的距离.

如图 1-5-6，过点 P 分别作 y 轴、x 轴的垂线，交直线 l 于点 M，N. 我们通过计算 Rt$\triangle PMN$ 的面积求 PE.

第一步　求出 $M\left(-\frac{9}{5},\ 4\right)$，$N\left(2,\ -\frac{3}{4}\right)$；

第二步　计算

$$PM=\left|-\frac{9}{5}-2\right|=\frac{19}{5},\ PN=\left|-\frac{3}{4}-4\right|=\frac{19}{4};$$

还可用两点间距离公式求 MN.

第三步　由勾股定理，得

$$MN=\sqrt{PM^2+PN^2}=\sqrt{\left(\frac{19}{5}\right)^2+\left(\frac{19}{4}\right)^2}=\frac{19}{20}\sqrt{41};$$

第四步　由三角形面积公式可知

$$PE=\frac{PM\cdot PN}{MN}=\frac{\frac{19}{5}\times\frac{19}{4}}{\frac{19}{20}\sqrt{41}}=\frac{19\sqrt{41}}{41}.$$

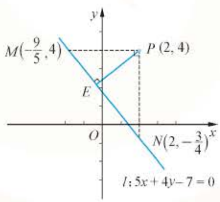


图 1-5-6

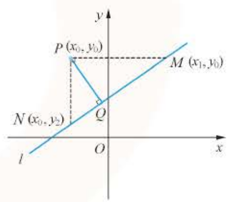


图 1-5-7

一般地，对于直线

$$l:Ax+By+C=0(A\neq 0,\ B\neq 0)$$

和直线 l 外一点 $P(x_0,\ y_0)$，过点 P 作 $PQ\perp l$，垂足为 Q. 过点 P 分别作 y 轴、x 轴的垂线，交 l 于点 $M(x_1,\ y_0)$，$N(x_0,\ y_2)$(图 1-5-7).

由
$$Ax_1+By_0+C=0,\ Ax_0+By_2+C=0,$$
得
$$x_1=\frac{-By_0-C}{A},\ y_2=\frac{-Ax_0-C}{B}.$$
所以
$$PM=|x_1-x_0|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right|,$$
$$PN=|y_2-y_0|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|.$$
因为 PQ 是 Rt$\triangle PMN$ 斜边上的高，所以由三角形面积公式可知

当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，此式仍然成立.

$$PQ=\frac{PM\cdot PN}{MN}=\frac{PM\cdot PN}{\sqrt{PM^2+PN^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$
由此，我们得到点 $P(x_0,\ y_0)$ 到直线
$$l:\ Ax+By+C=0$$
的距离为
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

思　考

你还能通过其他途径求点 P 到直线 l 的距离吗？

例 4　分别求点 $P(-1,\ 2)$ 到下列直线的距离：

(1) $2x+y-10=0$;　　　　(2) $3x=2$.

解　(1) 根据点到直线的距离公式，得
$$d=\frac{|2\times(-1)+2-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}.$$

当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，可直接利用图形性质求出点到直线的距离.

(2) 因为直线 $3x=2$ 平行于 y 轴，所以
$$d=\left|\frac{2}{3}-(-1)\right|=\frac{5}{3}.$$

例 5　求两条平行直线 $x+3y-4=0$ 与 $2x+6y-9=0$ 之间的距离.

分析　在两条平行直线中的一条直线上任取一点，将两条平行直线之间的距离转化为点到直线的距离.

解　在直线 $x+3y-4=0$ 上取点 $P(4,\ 0)$，点 $P(4,\ 0)$ 到直线 $2x+6y-9=0$ 的距离 d 就是两条平行直线之间的距离.

因此，两条平行直线之间的距离为

$$d=\frac{|2\times 4+6\times 0-9|}{\sqrt{2^2+6^2}}=\frac{1}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{10}}{20}.$$

思　考

已知两条平行直线

$$l_1: Ax+By+C_1=0,$$
$$l_2: Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2).$$

你能证明直线 l_1 和 l_2 之间的距离为 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 吗?

例6　建立适当的直角坐标系，证明：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

证明　设△ABC 是等腰三角形，以底边 CA 所在直线为 x 轴，过顶点 B 且垂直于 CA 的直线为 y 轴，建立直角坐标系(图1-5-8).

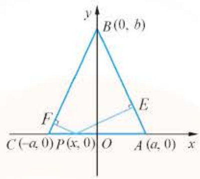


图1-5-8

设 $A(a, 0)$，$B(0, b)(a>0, b>0)$，则 $C(-a, 0)$.

直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,

即 $$bx+ay-ab=0.$$

直线 BC 的方程为 $\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{b}=1$,

即 $$bx-ay+ab=0.$$

设底边 AC 上任意一点为 $P(x, 0)(-a\leqslant x\leqslant a)$，则点 P 到直线 AB 的距离为

$$PE=\frac{|bx-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(a-x)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

点 P 到直线 BC 的距离为

$$PF=\frac{|bx+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

点 A 到直线 BC 的距离为

$$h=\frac{|ba+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

所以

$$PE+PF=\frac{b(a-x)}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=h.$$

因此,等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

练 习

1. 分别根据下列条件,求点 P 到直线 l 的距离:
   (1) $P(3,\ -2)$,l: $3x+4y-25=0$;
   (2) $P(-2,\ 1)$,l: $3y+5=0$.
2. 分别求下列两条平行直线之间的距离:
   (1) $5x-12y-2=0$ 与 $5x-12y+15=0$;
   (2) $6x-4y+5=0$ 与 $y=\frac{3}{2}x$.
3. 已知直线 l 过原点,且点 $M(5,\ 0)$ 到直线 l 的距离等于 3,求直线 l 的方程.
4. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1,\ 1)$, $B(3,\ 4)$, $C(4,\ -1)$, 求 AB 边上高的长.

习题 1.5

感受·理解

1. 分别根据下列条件,求 A, B 两点之间的距离:
   (1) $A(-2,\ 0)$,$B(-2,\ -3)$;
   (2) $A(0,\ -3)$,$B(-3,\ -3)$;
   (3) $A(3,\ 5)$,$B(-3,\ 3)$.
2. 已知点 $P(-1,\ 2)$,求点 P 分别关于原点、x 轴和 y 轴的对称点的坐标.
3. 已知点 A 在 x 轴上,点 B 在 y 轴上,线段 AB 的中点 M 的坐标是 $(2,\ -1)$,求线段 AB 的长.
4. 已知 A,B 两点都在直线 $y=x-1$ 上,且 A,B 两点横坐标之差为 $\sqrt{2}$,求 A,B 两点之间的距离.
5. 已知两点 $A(2,\ 3)$, $B(-1,\ 4)$,且点 $P(x,\ y)$ 到点 A, B 的距离相等,求实数 x, y 满足的条件.
6. 已知点 $P(x,\ y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上,O 是坐标原点,求 OP 的最小值.
7. 分别根据下列条件,求点 P 到直线 l 的距离:
   (1) $P(2,\ 1)$, l: $2x+3=0$;
   (2) $P(-3,\ 4)$, l: $3x-4y+30=0$.
8. 已知直线 l 到两条平行直线 $2x-y+2=0$ 和 $2x-y+4=0$ 的距离相等,求直线 l 的方程.

9. 已知直线 l 在 y 轴上的截距为 10,且原点到直线 l 的距离是 8,求直线 l 的方程.

10. 已知点 P 在直线 $3x+y-5=0$ 上,且点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离等于$\sqrt{2}$,求点 P 的坐标.

11. 已知点 $A(7, 8)$, $B(10, 4)$, $C(2, -4)$,求$\triangle ABC$ 的面积.

12. 已知直线 l 过点$(-2, 3)$,且原点到直线 l 的距离是 2,求直线 l 的方程.

13. 在$\triangle ABC$ 中,E,F 分别为 AB,AC 的中点,建立适当的直角坐标系,求证:$EF \parallel BC$,且 $EF=\frac{1}{2}BC$.

思考・运用

14. 过点 $P(3, 0)$ 作直线 l,使它被两条相交直线 $2x-y-2=0$ 和 $x+y+3=0$ 所截得的线段恰好被点 P 平分,求直线 l 的方程.

15. 已知光线通过点 $A(-2, 3)$,经 x 轴反射,其反射光线通过点 $B(5, 7)$,求:

(1) 入射光线所在直线的方程;

(2) 反射光线所在直线的方程.

16. 已知点 $A(2, 1)$,直线 l: $x-y+1=0$, 求点 A 关于直线 l 的对称点 B 的坐标.

17. 在直线 $x+2y=0$ 上求一点 P,使它到原点的距离与到直线 $x+2y-3=0$ 的距离相等.

18. 已知直线 l: $y=3x+3$,求:

(1) 直线 l 关于点 $M(3, 2)$ 对称的直线的方程;

(2) 直线 $x-y-2=0$ 关于直线 l 对称的直线的方程.

19. 建立适当的直角坐标系,证明:平行四边形四边的平方和等于两条对角线的平方和.

20. 证明:点 $A(a, b)$, $B(b, a)$关于直线 $y=x$ 对称.

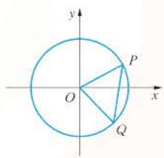
探究・拓展

21. 求函数 $f(x)=\sqrt{(x+1)^2+9}+\sqrt{(x-6)^2+4}$ 的最小值.

22. 如图,点 P 是角 α 的终边与单位圆的交点,点 Q 是角 $-\beta$ 的终边与单位圆的交点.

(1) 求 PQ;

(2) 求证: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.



(第 22 题)

23. 某人上午 8 时从山下大本营出发登山,下午 4 时到达山顶. 次日上午 8 时从山顶沿原路返回,下午 4 时回到山下大本营. 如果该人以同样的速度匀速上山、下山,那么两天中他可能在同一时刻经过途中同一地点吗? 如果他在上山、下山过程中不是匀速行进的,他还可能在同一时刻经过途中同一地点吗?

24. (阅读题)点到直线的距离.

已知直线 l: $Ax+By+C=0$(A, B 不同时为 0)和直线 l 外一点

$P_0(x_0, y_0)$，过点 P_0 且与直线 l 垂直的直线 l' 的方程为 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$，直线 l 与 l' 的交点为 $P_1(x_1, y_1)$，则点 P_0 到直线 l 的距离为

$$d=P_0P_1=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}. \qquad (*)$$

因为点 P_1 是直线 l 与 l' 的交点，

所以
$$Ax_1+By_1+C=0, \qquad ①$$
$$B(x_1-x_0)-A(y_1-y_0)=0. \qquad ②$$

策略 1：由①②联立，解出 x_1，y_1，然后代入（$*$）式，求出 d.

策略 2：由于 $d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$，

而①式等价于

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=-Ax_0-By_0-C. \qquad ③$$

将 x_1-x_0，y_1-y_0 看作整体，由②③解出 x_1-x_0，y_1-y_0，然后代入（$*$）式，求出 d.

策略 3：注意到②③和 $d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ 的特点，将②式的两边平方与③式的两边平方相加，得

$$(A^2+B^2)[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]=(Ax_0+By_0+C)^2,$$

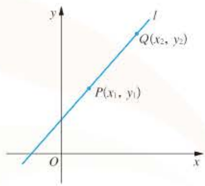
故
$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

问题与探究

向量方法在直线中的应用

借助平面直角坐标系，可以建立点与坐标、直线与方程之间的对应关系，而向量也是沟通几何与代数的一种重要工具，利用向量也可以有效地研究与直线、直线方程有关的问题. 那么，如何利用向量来研究与直线有关的问题呢?

如图，设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$是直线 l 上不同的两点，直线 l 上的向量$\overrightarrow{PQ}$以及与它平行的非零向量都称为直线 l 的**方向向量**. 直线 l 的一个方向向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标是 (x_2-x_1, y_2-y_1).



当直线 $l' \perp l$ 时，直线 l'的方向向量称为直线 l 的**法向量**.

对于直线 l: $Ax+By+C=0$ (A, B 不同时为 0)，则

$$\begin{cases}Ax_1+By_1+C=0,\\Ax_2+By_2+C=0.\end{cases}$$

从而得 $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$，即向量 (x_2-x_1, y_2-y_1) 与向量$(-B, A)$平行，与向量(A, B)垂直，因此，向量$(-B, A)$是直线 l 的一个方向向量，向量(A, B)是直线 l 的一个法向量.

问题 1 已知直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且它的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(A, B)$ (A, B 不同时为 0)，求直线 l 的方程.

解 设 $P(x, y)$为直线 l 上的任意一点.

当点 P 异于点 P_0 时，因为 $\boldsymbol{m}=(A, B)$ 是直线 l 的法向量，所以 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{P_0P}$，即 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$，从而

$$(A, B)\cdot(x-x_0, y-y_0)=0.$$

因此

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

当点 P 与点 P_0 重合时，显然有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

反之，对于方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ 的任意一组解(x, y)，它满足

$$(A, B)\cdot(x-x_0, y-y_0)=0,$$

从而(x,y)对应的点P满足$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$，即点$P$在直线$l$上.

因此，所求直线l的方程为$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

问题 2 已知直线l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$（A_1，B_1不同时为0），l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$（A_2，B_2不同时为0），利用向量的方法探究两直线平行的条件.

直线l_1，l_2不重合.

解 直线l_1的一个方向向量为$\boldsymbol{a}=(-B_1,A_1)$，直线$l_2$的一个方向向量为$\boldsymbol{b}=(-B_2,A_2)$.

若$l_1 /\!/ l_2$，则$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$，所以$(-B_1)A_2-(-B_2)A_1=0$，

即
$$A_1B_2-A_2B_1=0.$$

反之，若$A_1B_2-A_2B_1=0$，则$(-B_1)A_2-(-B_2)A_1=0$，故$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$，从而$l_1 /\!/ l_2$.

综上，
$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0.$$

探究 请你用向量的方法推导：

(1) 直线l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$与直线l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$垂直的条件；

(2) 点$P_0(x_0,y_0)$到直线l：$Ax+By+C=0$（A，B不同时为0）的距离公式.

阅读

解析几何的产生

对于曲线性质的研究，一直是古希腊几何学的一大内容. 古希腊数学家通过对众多曲线的研究，开始对曲线的本质有了统一的认识，他们把曲线看成由符合一定条件的所有点组成的集合，从而把曲线称为动点的轨迹.

认识是统一了，但是在具体的研究中，又各不相同，对于各种不同的曲线，缺少一种一般的表示方法和统一的研究手段.

17世纪前半叶，一个崭新的数学分支——解析几何学的创立，标志着近代数学的开端，并为数学的应用开辟了广阔的领域. 在创建解析几何学的过程中，法国数学家笛卡儿（R. Descartes，1596—1650）和费马（P. de Fermat，1601—1665）做出了最重要的贡献，成为解析几何学的创立者.

笛卡儿

笛卡儿1596年3月31日出生于法国，1650年2月11日卒于瑞典. 1637年，笛卡儿发表了《几何学》，它确立了笛卡儿在数学史上的地位. 在《几何学》卷一中，笛卡儿用平面上一点到两条固定直线的距离来确定点的位置，用坐标来描述平面上的点.

笛卡儿的解析几何有两个基本的思想：

(1) 用有序数对表示点的坐标；

(2) 把互相关联的两个未知数的代数方程，看成平面上的一条曲线.

对于坐标，笛卡儿与前人所不同的是，他不仅用坐标表示点的位置，而且通过“点动成线”的思想，把坐标具体用到了建立曲线的方程上；对于方程，笛卡儿则不仅把它看成未知数与已知数之间的关系式，而且更多地把它看作两个变量之间的关系式.

这样，他就建立了点和有序实数对之间以及曲线和方程之间的对应关系，从而把研究曲线的几何问题转化为研究方程的代数问题，通过对方程的讨论来研究曲线的几何性质.


费马

费马1601年8月出生于法国，他是一位业余数学家，被后人誉为“业余数学之王”. 费马在他的《平面和立体轨迹引论》一书中，指出了对轨迹要给予一般的表示，就只能借助于代数.

费马所建立的一般方法，就是坐标法，即通过引进坐标把曲线用代数方程表示出来. 费马所用的坐标实际上是斜角坐标，但是没有标明 y 轴，而且他不用负数. 尽管他的坐标法并不那么简便，但其本质与现代解析几何是一致的.

由此，历史上公认笛卡儿和费马为解析几何的奠基人. 但是笛卡儿和费马的解析几何和现在通用的有很大的不同. 他们的书中都没有出现过现在称为“笛卡儿坐标”的直角坐标系. 笛卡儿是根据问题特点选用他的轴系，仍然属于斜角坐标. 他们的书中都没有使用“坐标”等术语. “坐标”(coordinates)一词是由德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)于1692年首先使用的.

我们知道，曲线可以看作按照某种规律运动的点的集合或轨迹. 在平面直角坐标系中，设动点 P 的坐标是 (x, y)，点 P 在运动，它的坐标 x 和 y 也随之相应地变化. 由于点 P 是按照某种规律在运动，因此 x 和 y 这两个变量相互依赖和制约，也就是说，它们之间应满足一定的关系. 这种关系用代数方法表示出来，就可以得到一个含有 x, y 两个变量的方程 $F(x, y)=0$. 这样，就建立了曲线和方程之间的对应关系.

写　作

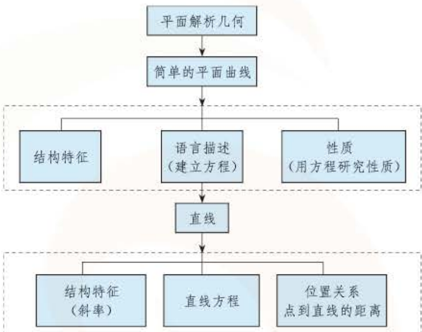
解析几何的形成与发展

收集解析几何的形成与发展的历史资料，撰写论文，论述解析几何发展的过程，重要的结果，解析几何发展中的重要人物、事件及其对人类文明的贡献.

本章回顾

本 章 概 览

本章主要研究了平面直角坐标系中直线的有关知识. 学习本章时,应充分体会用坐标法研究问题的一般思路和基本方法,也就是用坐标、斜率、二元一次方程描述点和直线,建立点与坐标、直线与方程之间的对应关系,进而用代数方法研究与直线有关的问题.



坐标法不仅是研究几何问题的重要方法,而且是一种被广泛用于其他领域的重要数学方法. 通过坐标系,把点和坐标、曲线与方程联系起来,沟通了几何与代数之间的联系,体现了数形结合的重要数学思想.

复习题

感受 · 理解

1. 设 a 为实数,已知直线 $ax+3y-5=0$ 经过点 $A(2, 1)$,求 a 的值.

2. 设 a 为实数,已知过两点 $A(-a, 3)$, $B(5, -a)$的直线的斜率为 1,求 a 的值及 A, B 两点间的距离.

3. 如果 $AC<0$, $BC>0$,那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过(　　).

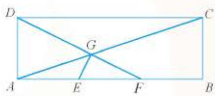
A. 第一象限　　　　B. 第二象限

C. 第三象限　　　　D. 第四象限

4. 设 m, n 为实数,若直线 $mx+ny-1=0$ 经过第一、三、四象限,求 m, n 满足的条件.
5. 已知直线 l 过点 $P(-5, -4)$,且与两坐标轴围成的三角形的面积为5,求直线 l 的方程.
6. 已知直线过点 $P(5, 6)$,它在 x 轴上的截距是在 y 轴上的截距的2倍,求此直线的方程.
7. 设 a 为实数,若直线 $x+ay=2a+2$ 与直线 $ax+y=a+1$ 平行,求 a 的值.
8. 已知直线 l_1: $x+3y-7=0$, l_2: $x-y+1=0$, 求经过 l_1 与 l_2 的交点且垂直于 l_1 的直线的方程.
9. 已知点 $A(1, 3)$关于直线 l 的对称点为 $B(-5, 1)$,求直线 l 的方程.
10. 已知光线通过点 $A(2, 3)$,经直线 $x+y+1=0$ 反射,其反射光线通过点 $B(1, 1)$,分别求入射光线和反射光线所在直线的方程.
11. 已知点 A 与点 $P(1, -1)$的距离为5,且到 y 轴的距离等于4,求 A 点的坐标.
12. 设 a 为实数,若两条平行直线 $2x+3y-6=0$ 和 $2x+3y+a=0$ 之间的距离等于2,求 a 的值.
13. 已知直线 l 过点 $P(1, 2)$,点 $M(2, 3)$和 $N(4, -5)$到 l 的距离相等,求直线 l 的方程.

思考·运用

14. 设 k 为实数,已知点 $A(-4, 1)$, $B(3, -1)$,且直线 $y=kx+2$ 与线段 AB 恒有公共点,求 k 的取值范围.
15. 证明:无论 k 取任何实数,直线 $(1+4k)x-(2-3k)y+(2-14k)=0$ 必经过一个定点,并求出定点的坐标.
16. 求函数 $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+9}-\sqrt{(x-5)^2+4}$ 的最大值.
17. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,已知 $AB=3AD$, E, F 为 AB 的两个三等分点, AC 与 DF 交于点 G. 建立适当的直角坐标系,求证: $EG\perp DF$.



(第17题)

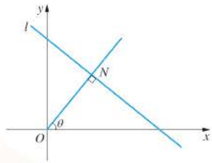
18. 已知$\triangle ABC$ 的一条内角平分线 CD 的方程为 $2x+y-1=0$,两个顶点为 $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$,求顶点 C 的坐标.
19. 在直角坐标系 xOy 中,已知射线 OA: $x-y=0(x\geqslant 0)$, OB: $\sqrt{3}x+3y=0\ (x\geqslant 0)$, 过点 $P(1, 0)$ 作直线分别交射线 OA, OB 于点 A, B.
(1) 当线段 AB 的中点为 P 时,求直线 AB 的方程;
(2) 当线段 AB 的中点在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上时,求直线 AB 的方程.

探究·拓展

20. 如图,由原点 O 向直线 l 作垂线 ON,垂足为 N. 设 $ON=p$, ON 与 x 轴正方向所成的角为 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$.
(1) 求证:直线 l 的方程为

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0;$$

(2) 利用上面的方程推导点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离公式.



(第 20 题)

21. 把函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的一段图象近似地看作线段,且设 $a < c < b$,试用 $f(a)$, $f(b)$ 估计 $f(c)$.

本章测试

一、填空题

1. 若直线 l 经过点 $A(1, 2)$，$B(3, 6)$，则 l 的斜率为________.

2. 过点 $(3, 5)$ 且斜率为 -2 的直线的方程为________________.

3. 设 m 为实数，若直线 l：$x-2y+m-1=0$ 在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{2}$，则 m 的值为________.

4. 过点 $(0, 1)$ 且与直线 $2x-y+3=0$ 平行的直线的方程为______________.

5. 两条平行直线 $4x+3y+3=0$ 与 $8x+6y-9=0$ 间的距离为________.

6. 设 k 为实数，若直线 l：$y-1=k(x-\sqrt{3})$ 不经过第四象限，则 k 的取值范围为________.

二、选择题

7. 若直线 $y=2x+1$ 的斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b，则（　　）.

A. $k=-\frac{1}{2}$，$b=1$　　　　B. $k=2$，$b=1$

C. $k=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$　　　　D. $k=-2$，$b=\frac{1}{2}$

8. 过两点 $(-2, 4)$ 和 $(4, -1)$ 的直线在 y 轴上的截距为（　　）.

A. $\frac{14}{5}$　　B. $-\frac{14}{5}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $-\frac{7}{3}$

9. 若△ABC 的三个顶点为 $A(1, 0)$，$B(2, 1)$，$C(0, 2)$，则 BC 边上的高所在直线的方程为（　　）.

A. $3x+2y-3=0$　　　　B. $2x-y-2=0$

C. $2x-y+1=0$　　　　D. $2x+y-2=0$

10. 若直线 l 与直线 $y=1$ 交于点 P，与直线 $x-y-7=0$ 交于点 Q，且线段 PQ 的中点是 $(1,-1)$，则 l 的斜率为（　　）.

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{2}{3}$

三、解答题

11. 求过点 $(-2, 3)$ 且与直线 $2x+y+1=0$ 垂直的直线 l 的方程.

12. 设 m 为实数，已知三条直线 $x+y-3=0$，$3x-y-1=0$ 和 $2x+3y+m=0$ 相交于一点，求 m 的值.

13. 已知点 $A(2, 4)$，直线 l：$x-2y+1=0$，且点 M 在直线 l 上，$AM\perp l$，求点 M 的坐标.

14. 已知直线 l 与直线 $3x+4y=0$ 平行，且与坐标轴围成的三角形的面积为 6，求直线 l 的方程.

15. 过点 $(2,3)$ 的直线 l 被两平行直线 l_1：$2x-5y+9=0$ 与 l_2：$2x-5y-7=0$ 所截得的线段 AB 的中点恰好在直线 $x-4y-1=0$ 上，求直线 l 的方程.

第2章　圆与方程

圆与方程

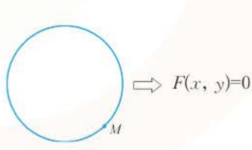
- 圆的方程
- 直线与圆的位置关系
- 圆与圆的位置关系

我解决过的每一个问题都成为日后用以解决其他问题的法则.

——笛卡儿

在“直线与方程”一章中，我们借助平面直角坐标系，建立了直线的方程，并通过方程来研究直线的性质和位置关系，初步体会了解析几何研究问题的一般思路和数形结合的思想方法.

圆是常见的几何图形，圆也可以看成满足某种条件的点的集合. 在平面直角坐标系中，当点用坐标 (x, y) 表示后，圆便可以用一个方程 $F(x, y)=0$ 表示，进而通过对方程的研究来研究圆.



- 如何建立圆的方程?
- 如何利用圆的方程研究圆的性质?

2.1 圆的方程

圆是最完美的曲线，它是平面内到定点的距离等于定长的点的集合. 定点就是圆心，定长就是半径.

● 如何建立圆的方程?

以定点 O 为圆心，定长 r 为半径，画出一个圆(图 2-1-1(1))，我们来建立它的方程.

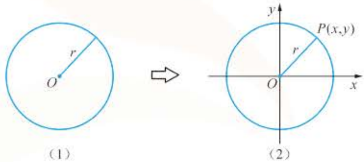


图 2-1-1

第一步　以定点 O 为原点建立直角坐标系(图 2-1-1(2)).

第二步　设 $P(x, y)$ 是圆上的任意一点.

第三步　依题意，$OP=r$，得

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r.$$

第四步　化简，得

$$x^2+y^2=r^2.$$

以原点为圆心，半径为 1 的圆通常称为单位圆.

反过来，设 (x_0, y_0) 是方程 $x^2+y^2=r^2$ 的一组解，即 ${x_0}^2+{y_0}^2=r^2$，从而

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=r,$$

所以点 $P_0(x_0, y_0)$ 满足 $OP_0=r$，即点 P_0 在圆 O 上.

因此，所求圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2.$$

一般地，设点 $P(x, y)$ 是以 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆上的任意一点(图 2-1-2)，则 $CP=r$. 由两点间的距离公式得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

即

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad ①$$

反过来，若点 P_1 的坐标 (x_1, y_1) 是方程①的解，则

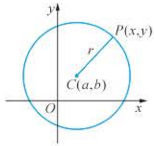


图 2-1-2

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,$$

即
$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=r.$$

这说明点 $P_1(x_1, y_1)$在以 $C(a, b)$为圆心,r 为半径的圆上.

确定圆的标准方程,只要确定方程中的三个常数 a, b, r.

方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$$

叫作以点(a, b)为圆心,r 为半径的**圆的标准方程**(standard equation of circle).

例 1 求圆心是 $C(2, -3)$,且经过坐标原点的圆的方程.

解 因为圆 C 经过坐标原点,所以圆 C 的半径是

$$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}.$$

因此,所求圆的方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=13.$$

例 2 已知隧道的截面是半径为 4 m 的半圆,车辆只能在道路中心线一侧行驶,一辆宽为 2.7 m,高为 3 m 的货车能不能驶入这个隧道?

解 以某一截面半圆的圆心为坐标原点,半圆的直径 AB 所在的直线为 x 轴,建立直角坐标系(图 2-1-3),那么半圆的方程为

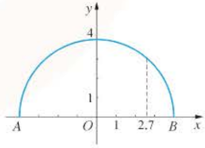


图 2-1-3

$$x^2+y^2=16(y\geqslant 0).$$

将 $x=2.7$ 代入,得

$$y=\sqrt{16-2.7^2}=\sqrt{8.71}<3,$$

即在离中心线 2.7 m 处，隧道的高度低于货车的高度.

因此，货车不能驶入这个隧道.

思　考

假设货车的最大宽度为 a m，那么货车要驶入该隧道，限高为多少？

由圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

由此可见，圆的方程具有如下形式：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \qquad ②$$

其中 D，E，F 为常数.

那么，形如②的方程是否都表示圆呢？

由方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F). \qquad ③$$

与圆的标准方程比较，可知：

(1) 当

$$D^2+E^2-4F>0$$

时，方程②表示以点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆；

(2) 当

$$D^2+E^2-4F=0$$

时，方程②只有一解，表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$；

(3) 当

$$D^2+E^2-4F<0$$

时，方程②无实数解，不表示任何图形.

确定圆的一般方程，只要确定方程中的三个常数 D，E，F.

方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$$

叫作**圆的一般方程**(general equation of circle).

例 3 已知$\triangle ABC$的三个顶点为$A(4, 3)$，$B(5, 2)$，$C(1, 0)$，求$\triangle ABC$外接圆的方程.

解 设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为点A，B，C在所求的圆上，所以

$$\begin{cases}4D+3E+F+25=0,\\5D+2E+F+29=0,\\D+F+1=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}D=-6,\\E=-2,\\F=5.\end{cases}$$

故所求圆的方程是

$$x^2+y^2-6x-2y+5=0.$$

思 考

本题还有其他解法吗？

例 4 已知点$M(x, y)$到两个定点$A(-3, 0)$，$B(3, 0)$的距离之比为 2，求x，y满足的关系式，并指出满足条件的点M所构成的曲线.

解 依题意，点M满足

$$\frac{MA}{MB}=2.$$

由$MA=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$，$MB=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，得

$$\frac{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=2.$$

化简整理，得

$$x^2+y^2-10x+9=0. \quad (*)$$

反过来，可以验证，当x，y满足（$*$）式时，点M到点A，B的距离之比为 2.

因此x，y满足的关系式为

$$x^2+y^2-10x+9=0.$$

由$x^2+y^2-10x+9=0$，得

$$(x-5)^2+y^2=16.$$

因此，满足条件的点M所构成的曲线为以点$(5, 0)$为圆心，4 为半径的圆.

满足条件的点 M 所构成的曲线即为动点 M 的轨迹，对应的方程即为动点 M 的轨迹方程.

思　考

已知平面上两个定点 A, B，动点 M 满足 $\dfrac{MA}{MB}=\lambda(\lambda>0)$，则点 M 的轨迹是什么？建立适当的直角坐标系，写出点 M 的轨迹方程.

例 5　某圆拱梁的示意图如图 2-1-4 所示. 该圆拱的跨度 AB 是 36 m，拱高 OP 是 6 m，在建造时，每隔 3 m 需要一个支柱支撑，求支柱 A_2P_2 的长(精确到 0.01 m).

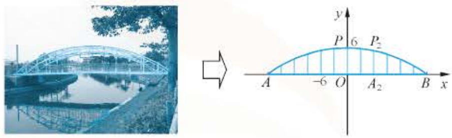


图 2-1-4

解　以线段 AB 所在的直线为 x 轴，线段 AB 的中点 O 为坐标原点，建立直角坐标系 xOy，那么点 A, B, P 的坐标分别为 $(-18, 0)$, $(18, 0)$, $(0, 6)$.

设圆拱所在的圆的方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为点 A, B, P 在所求的圆上，所以

$$\begin{cases}18^2+18D+F=0,\\18^2-18D+F=0,\\6^2+6E+F=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}D=0,\\E=48,\\F=-324.\end{cases}$$

故圆拱所在的圆的方程是

$$x^2+y^2+48y-324=0.$$

将点 P_2 的横坐标 $x=6$ 代入上述方程，解得

$$y=-24+12\sqrt{6}\approx 5.39(\text{负值舍去}).$$

答　支柱 A_2P_2 的长约为 5.39 m.

练 习

1. 分别根据下列条件，求出圆的方程：
(1) 圆心在原点，半径为 6；
(2) 圆心为点(3, −4)，半径为$\sqrt{5}$；
(3) 过点 $P(6, 3)$，圆心为 $C(2, -2)$；
(4) 过原点，圆心为点(1, 2).
2. 分别根据下列条件，求出圆的方程：
(1) 圆心为 $C(-1, -5)$，且与 y 轴相切；
(2) 圆心为 $C(1, 3)$，且与直线 $3x-4y-6=0$ 相切；
(3) 半径为 2，且与 x 轴相切于原点；
(4) 过点 $M(0, 1)$，$N(2, 1)$，半径为$\sqrt{5}$.
3. (1) 已知点 $A(-4, -5)$，$B(6, -1)$，求以线段 AB 为直径的圆的方程；
(2) 求圆心在直线 $y=-x$ 上，且过两点 $A(2, 0)$，$B(0, -4)$ 的圆的方程.
4. 下列各方程是否表示圆？若表示圆，求其圆心的坐标和半径.
(1) $x^2+y^2-4x=0$；
(2) $x^2+y^2-4x-2y+5=0$；
(3) $x^2+y^2+x+2y+2=0$.
5. 分别判断点 $A(1, 1)$，$B(1, \sqrt{3})$，$C(1, 2)$与圆 $x^2+y^2=4$ 的位置关系.
6. 求过三点 $A(4, 1)$，$B(-6, 3)$，$C(3, 0)$的圆的方程.
7. 如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$ 表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称，那么必有(　　).
A. $D=E$　　B. $D=F$
C. $E=F$　　D. $D=E=F$
8. 设 m 为实数，若方程 $x^2+y^2+4mx-2y+4m^2-m=0$ 表示圆，求 m 的取值范围.

习题 2.1

感受・理解

1. 分别根据下列条件，求圆的方程：
(1) 过点 $P(-2, 2)$，圆心为 $C(3, 0)$；
(2) 与两坐标轴都相切，且圆心在直线 $2x-3y+5=0$ 上；
(3) 过点 $A(3, 5)$，$B(-3, 7)$，且圆心在 x 轴上；
(4) 过点 $A(-4, 0)$，$B(0, 2)$和原点.
2. 已知圆的内接正方形相对的两个顶点分别是 $A(5, 6)$，$C(3, -4)$，求这个圆的方程.
3. 已知半径为 5 的圆过点 $P(-4, 3)$，且圆心在直线 $2x-y+1=0$ 上，求这个圆的方程.
4. 已知$\triangle ABC$ 的顶点为 $A(-1, 5)$，$B(5, 5)$，$C(6, -2)$，求$\triangle ABC$ 的外接圆的方程.
5. 证明：$M(2, 0)$，$N(10, 0)$，$P(11, 3)$，$Q(10, 6)$四点共圆.
6. 设 b 为实数，若圆 $x^2+y^2+4x+2by+b^2=0$ 与 x 轴相切，求 b 的值.
7. 求过两点 $A(0, 4)$，$B(4, 6)$，且圆心在直线 $x-2y-2=0$ 上的圆的标准方程.

8. 已知线段 AB 的长为 2，动点 M 到 A，B 两点的距离的平方和为 10，求点 M 的轨迹.

思考·运用

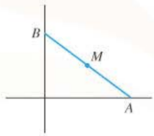
9. 设 a 为实数，若点 $P(1,\ 1)$ 在圆 $(x-a)^2+(y+a)^2=4$ 的内部，求 a 的取值范围.

10. 画出方程 $x-1=\sqrt{1-y^2}$ 表示的曲线.

11. 求圆 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 关于直线 $x-y+3=0$ 对称的圆的方程.

12. 已知点 $M(x,\ y)$ 到两个定点 $O(0,\ 0)$，$A(3,\ 0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$，问：点 M 的坐标应满足什么关系？画出满足条件的点 M 所构成的曲线.

13. 如图，长为 $2a$（a 是正常数）的线段 AB 的两个端点 A，B 分别在互相垂直的两条直线上滑动，求线段 AB 的中点 M 的轨迹.

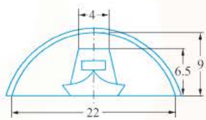


（第 13 题）

探究·拓展

14. 已知点 $A(4,\ 0)$，若 P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的一个动点，点 $Q(x,\ y)$ 是线段 AP 的中点，求点 Q 的轨迹方程.

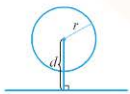
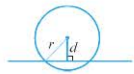
15. 河道上有一座圆拱桥，在正常水位时，拱圈最高点距水面 9 m，拱圈内水面宽 22 m. 一条船在水面以上部分高 6.5 m，船顶部宽 4 m，可以通行无阻. 近日水位暴涨了 2.7 m，为此，必须加重船载，降低船身，才能通过桥洞. 试问：船身应该降低多少？



（第 15 题）

2.2 直线与圆的位置关系

我们知道，在平面几何中，直线与圆有三种位置关系，即相离、相切和相交，而圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 之间的大小关系决定了直线与圆的位置关系.

相　　离	相　　切	相　　交
		
$d>r$	$d=r$	$d<r$

在平面直角坐标系中，直线与圆都可以用方程来表示，那么，

● 怎样根据方程来判断直线与圆的位置关系呢？

设直线 l 和圆 C 的方程分别为

$$Ax+By+C=0,\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

如果直线 l 与圆 C 有公共点，那么公共点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果这两个方程有公共解，那么以公共解为坐标的点必是直线 l 与圆 C 的公共点.

直线 l 与圆 C 的方程联立方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.\end{cases}$$

我们有如下结论：

方程组无解	方程组仅有一组解	方程组有两组不同的解
直线与圆没有公共点	直线与圆有且只有一个公共点	直线与圆有两个公共点
相离	相切	相交

例 1　求直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 的公共点的坐标，并判断它们的位置关系.

解 直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 的公共点的坐标就是方程组

$$\begin{cases}4x+3y=40,\\x^2+y^2=100\end{cases}$$

的解.

解这个方程组,得

$$\begin{cases}x_1=10,\\y_1=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\dfrac{14}{5},\\[2ex]y_2=\dfrac{48}{5}.\end{cases}$$

所以公共点的坐标为 $(10,\ 0)$, $\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{48}{5}\right)$.

因为直线 $4x+3y=40$ 和圆 $x^2+y^2=100$ 有两个公共点,所以直线和圆相交.

例2 自点 $A(-1,\ 4)$ 作圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的切线 l,求切线 l 的方程.

解法1 当直线 l 垂直于 x 轴时,直线 l: $x=-1$ 与圆相离,不满足条件.

当直线 l 不垂直于 x 轴时,可设直线 l 的方程为

$$y-4=k(x+1),$$

即

$$kx-y+(k+4)=0.$$

如图2-2-1,因为直线与圆相切,所以圆心 $(2,\ 3)$ 到直线 l 的距离等于圆的半径,从而

$$\frac{|2k-3+(k+4)|}{\sqrt{k^2+1}}=1,$$

解得

$$k=0 \text{ 或 } k=-\frac{3}{4}.$$

因此,所求直线 l 的方程是 $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.

当点 A 的坐标为 $(2,\ 2)$ 或 $(1,\ 1)$ 时,结果分别有什么变化?

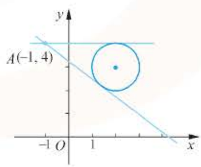


图2-2-1

解法2 当直线 l 垂直于 x 轴时,直线 l: $x=-1$ 与圆相离,不满

足条件.

当直线 l 不垂直于 x 轴时，可设直线 l 的方程为

$$y-4=k(x+1).$$

因为直线 l 与圆相切，所以方程组

$$\begin{cases}y-4=k(x+1),\\(x-2)^2+(y-3)^2=1\end{cases}$$

仅有一组解.

由方程组消去 y，得到关于 x 的一元二次方程

$$(1+k^2)x^2+(2k^2+2k-4)x+k^2+2k+4=0.$$

依题意，这个一元二次方程有两个相等的实数根，所以判别式

$$\Delta=(2k^2+2k-4)^2-4(1+k^2)(k^2+2k+4)=0,$$

解得 $$k=0\text{ 或 }k=-\frac{3}{4}.$$

因此，所求直线 l 的方程是 $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.

例 3 求直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长.

解法 1 直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 和圆 $x^2+y^2=4$ 的公共点的坐标就是方程组

$$\begin{cases}x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0,\\x^2+y^2=4\end{cases}$$

的解.

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x_1=-\sqrt{3},\\y_1=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=0,\\y_2=2,\end{cases}$$

所以公共点的坐标为 $(-\sqrt{3},1)$，$(0,2)$.

从而知直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长为

$$\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(1-2)^2}=2.$$

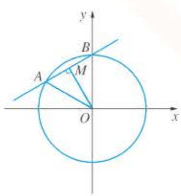


图 2-2-2

解法 2 如图 2-2-2，设直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，弦 AB 的中点为 M，则 $OM\perp AB$（O 为坐标原点），所以

$$OM=\frac{|0-0+2\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\sqrt{3},$$

从而

$$AB=2AM=2\sqrt{OA^2-OM^2}=2\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=2.$$

练　习

1. 分别根据下列条件，判断直线 l 与圆 C 的位置关系：
   (1) l: $x+y-1=0$,　　C: $x^2+y^2=4$;
   (2) l: $4x-3y-8=0$,　　C: $x^2+(y+1)^2=1$;
   (3) l: $x+y-4=0$,　　C: $x^2+y^2+2x=0$;
   (4) l: $y=0$,　　C: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.
2. 设 a, b 为实数，若直线 $ax+by=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交，则点 $P(a, b)$与圆的位置关系是(　　).
   A. 在圆上　　B. 在圆外
   C. 在圆内　　D. 不能确定
3. (1) 求过点$(1, \sqrt{3})$且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线的方程；
   (2) 求过原点且与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 相切的直线的方程；
   (3) 求与圆 $x^2+y^2=8$ 相切，且斜率为 -1 的直线的方程.
4. 设 a 为实数，若直线 $2x+y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 没有公共点，求 a 的取值范围.
5. 求直线 $x+2y-3=0$ 被圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长.
6. 从圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 外一点 $P(2, 3)$ 向圆引切线，求此切线的长.
7. 若一个圆的圆心在直线 $y=-2x$ 上，且此圆与直线 $y=1-x$ 相切于点$(2, -1)$，求此圆的方程.

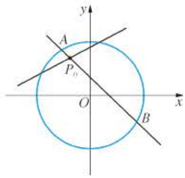
习题 2.2

感受・理解

1. 分别根据下列条件，判断直线 l 与圆 C 的位置关系：
   (1) l: $x+y+4=0$,　　C: $x^2+y^2=2$;
   (2) l: $3x-4y+4=0$,　　C: $(x-2)^2+y^2=4$;
   (3) l: $2x+y-1=0$,　　C: $x^2+(y-2)^2=1$.
2. 过点 $P(-3, -4)$ 作直线 l，当 l 的斜率为何值时：
   (1) 直线 l 将圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 平分?
   (2) 直线 l 与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相切?
   (3) 直线 l 与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相交，且所截得的弦长为 2?
3. 已知过点 $A(-1, -1)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ 相交，求直线 l 的斜率的取值范围.
4. 求半径为$\sqrt{13}$，且与直线 $2x+3y-10=0$ 相切于点 $P(2, 2)$ 的圆的方程.
5. 若一个圆的圆心在 y 轴上，且此圆与直线 l_1: $4x-3y+12=0$，直线 l_2: $3x-4y-12=0$ 都相切，求此圆的方程.
6. 若一个圆的圆心在直线 $3x-y=0$ 上，此圆与 x 轴相切，且被直线 $x-y=0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$，求此圆的方程.

思考·运用

7. 如图,圆 $x^2+y^2=8$ 内有一点 $P_0(-1,\ 2)$, AB 为过点 P_0 且倾斜角为 α 的弦.



(第 7 题)

(1) 当 $\alpha=135^\circ$ 时,求弦 AB 的长;

(2) 当弦 AB 被点 P_0 平分时,求直线 AB 的方程.

8. 已知直线 l 经过点 $P_0(3,\ -1)$,且被圆 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ 截得的弦长为 4,求 l 的方程.

9. 设 k 为实数,证明:无论 k 取何值,直线 l: $kx-y-4k+3=0$ 与圆 C: $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 都有两个交点.

10. 已知圆 C 的方程是 $x^2+y^2=r^2$,求证:经过圆 C 上一点 $M(x_0,\ y_0)$ 的切线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$.

11. 设 b 为实数,已知圆 $x^2+y^2=4$,直线 l: $y=x+b$. 当 b 为何值时,圆 $x^2+y^2=4$ 上恰有 3 个点到直线 l 的距离都等于 1?

探究·拓展

12. 对于圆 C: $x^2+y^2=r^2$,直线 l: $ax+by=r^2$,分别根据下列条件,判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

(1) 点 $P(a,\ b)$ 在圆 C 上;

(2) 点 $P(a,\ b)$ 在圆 C 外.

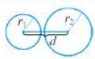
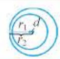
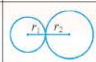
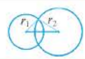
2.3 圆与圆的位置关系

我们知道，在平面几何中，圆与圆的位置关系有：外离、外切、相交、内切和内含. 这五种位置关系可以通过下面的步骤来判断：

第一步　计算两圆的半径 r_1，r_2；

第二步　计算两圆的圆心距 d；

第三步　根据 d 与 r_1，r_2 之间的关系，判断两圆的位置关系.

外　离	内　含	外　切	内　切	相　交
				
$d>r_1+r_2$	$d<\|r_1-r_2\|$	$d=r_1+r_2$	$d=\|r_1-r_2\|$	$\|r_1-r_2\|<d<r_1+r_2$

在平面直角坐标系中，圆可以用方程来表示，那么，

● 怎样根据方程来判断圆与圆的位置关系呢？

设圆 C_1 和圆 C_2 的方程分别为

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$
$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

如果圆 C_1 和圆 C_2 有公共点，那么公共点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，这两个方程有公共解，那么，以公共解为坐标的点必是圆 C_1 和圆 C_2 的公共点.

圆 C_1 和圆 C_2 的方程联立方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,\\x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.\end{cases}$$

我们有如下结论：

方程组无解		方程组仅有一组解		方程组有两组不同的解
两个圆没有公共点		两个圆有且只有一个公共点		两个圆有两个公共点
外离	内含	外切	内切	相交

例 1　判断下列两个圆的位置关系：

(1) $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ 与 $(x-2)^2+(y-5)^2=16$；

(2) $x^2+y^2-2x-3=0$ 与 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$.

解　(1) 根据题意得，两个圆的半径分别为 $r_1=1$ 和 $r_2=4$，两个圆的圆心距

$$d=\sqrt{[2-(-2)]^2+(5-2)^2}=5.$$

因为 $$d=r_1+r_2,$$

所以两个圆外切.

(2) **方法 1** 将两个圆的方程联立方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0, & ①\\ x^2+y^2-4x+2y+3=0. & ②\end{cases}$$

二元一次方程③表示的直线与两个圆之间有怎样的关系?能说明理由吗?

①-②,得 $$x-y-3=0. \quad ③$$

由③,得 $$y=x-3.$$

代入①式,并整理,得

$$x^2-4x+3=0,$$

解得 $$x_1=1,\ x_2=3.$$

从而 $y_1=-2$, $y_2=0$,即方程组有两组不同的解,所以两个圆相交.

方法 2 将两个圆的方程都化为标准方程,得

$$(x-1)^2+y^2=4,\ (x-2)^2+(y+1)^2=2.$$

那么两个圆的半径分别为 $r_1=2$ 和 $r_2=\sqrt{2}$,两个圆的圆心距

$$d=\sqrt{(1-2)^2+[0-(-1)]^2}=\sqrt{2}.$$

因为 $$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2,$$

所以两个圆相交.

例 2 求过点 $A(0,\ 6)$且与圆 C: $x^2+y^2+10x+10y=0$ 相切于原点的圆的方程.

分析 如图 2-3-1,所求圆经过原点和 $A(0,\ 6)$,且圆心应在已知圆的圆心与原点的连线上. 根据这三个条件可确定圆的方程.

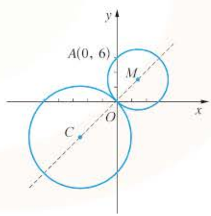


图 2-3-1

解 将圆 C 的方程化为标准方程,得

$$(x+5)^2+(y+5)^2=50,$$

则圆心为 $C(-5,-5)$，半径为 $5\sqrt{2}$.

所以经过此圆心和原点的直线的方程为 $x-y=0$.

设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由题意知，$O(0,0)$，$A(0,6)$ 在所求圆上，且圆心 $M(a,b)$ 在直线 $x-y=0$ 上，则有

$$\begin{cases}(0-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\(0-a)^2+(6-b)^2=r^2,\\a-b=0.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}a=3,\\b=3,\\r=3\sqrt{2}.\end{cases}$$

本题还有其他解法吗?

因此，所求圆的方程是

$$(x-3)^2+(y-3)^2=18.$$

练　习

1. 分别根据下列条件，判断两个圆的位置关系：
   (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 与 $(x-7)^2+(y-1)^2=36$；
   (2) $x^2+y^2-4x+2y=0$ 与 $x^2+y^2-2x-2y=0$.
2. 设 m 为实数，若圆 $x^2+y^2=m$ 与圆 $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ 相交，求 m 的取值范围.
3. 两圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 与 C_2：$(x+3)^2+y^2=4$ 的公切线有几条?
4. 求过点 $A(1,-1)$ 且与圆 C：$x^2+y^2=100$ 相切于点 $B(8,6)$ 的圆的方程.
5. 已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$，圆 C_2：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$，试求这两个圆的公共弦所在直线的方程.

习题 2.3

感受・理解

1. 分别根据下列条件，判断两个圆的位置关系：
   (1) $x^2+y^2-10x-10y=0$ 和 $x^2+y^2+6x+2y-40=0$；
   (2) $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 和 $x^2+y^2-14x-2y+14=0$.
2. 设 a 为正实数，若圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 没有公共点，求 a 的取值范围.
3. 已知以 $C(-4,3)$ 为圆心的圆与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，求圆 C 的方程.
4. 若一个圆的圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，且此圆经过圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 与圆 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点，求此圆的方程.
5. 若一个圆经过点 $M(3,-1)$，且与圆 $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切于点 $N(1,2)$，求此圆的方程.

思考·运用

6. 求圆 $x^2+y^2=9$ 与圆 $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ 的公共弦的长.
7. 若一个圆经过点 $M(2, -2)$ 及圆 $x^2+y^2-6x=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 的交点，求此圆的方程.

探究·拓展

8. 设 a，b 为实数，已知圆 P：$x^2+y^2=9$，点 $Q(a, b)$ 在圆 P 外，以线段 PQ 为直径作圆 M，与圆 P 相交于 A，B 两点.
   (1) 试分别确定直线 QA，QB 与圆 P 的位置关系.
   (2) 当 $QA=QB=4$ 时，点 Q 在什么曲线上运动?
   (3) 当 $a=-2$，$b=-3$ 时，求直线 AB 的方程.

问题与探究

圆的切线与切点弦

若 $P_0(x_0, y_0)$是圆 O: $x^2+y^2=r^2$ 上一点，则圆 O 的过点 P_0的切线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$.

事实上，因为点 $P_0(x_0, y_0)$ 在圆 O: $x^2+y^2=r^2$ 上，所以 $x_0^2+y_0^2=r^2$，即 $x_0\cdot x_0+y_0\cdot y_0=r^2$，从而点 P_0在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上.

又因为圆心 O 到直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 的距离

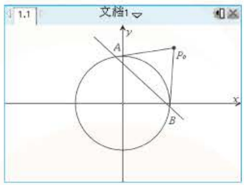
$$d=\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=r,$$

所以 $x_0x+y_0y=r^2$ 是圆 O 的过点 P_0的切线方程.

尝试用其他方法证明 $x_0x+y_0y=r^2$ 是圆 O 的过点 P_0 的切线方程.

当点 $P_0(x_0, y_0)$ 在圆 O 外时，方程 $x_0x+y_0y=r^2$ 表示怎样的直线呢？

如图，过 $P_0(x_0,y_0)$作圆 O 的两条切线，切点分别为A,B.



设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$，则直线 P_0A 的方程为

$$x_1x+y_1y=r^2.$$

因为 $P_0(x_0, y_0)$ 在直线 P_0A 上，所以

$$x_1x_0+y_1y_0=r^2,$$

故(x_1, y_1)满足方程

$$x_0x+y_0y=r^2,$$

即点 A 在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上.

同理点 B 在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上.

所以 $x_0x+y_0y=r^2$ 是直线 AB 的方程，即切点弦所在直线的方程.

探究：当点 $P_0(x_0, y_0)$ 在圆 O 内(异于 O)时，方程 $x_0x+y_0y=r^2$ 表示怎样的直线呢？

阅 读

希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943），德国数学家，在几何和数学基础方面有影响深远的研究.

数学问题(节选)

只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着这门科学独立发展的衰亡或中止. 正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题. 正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界.

一个数学问题应该是困难的，但却不应该是完全不可解决而致使我们白费力气的. 在通向那隐藏的真理的曲折道路上，它应该是指引我们前进的一盏明灯，并最终以成功的喜悦作为对我们的报偿.

在解决一个数学问题时，如果我们没有获得成功，原因常常在于我们没有认识到更一般的观点，即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节. 采取这样的观点之后，不仅使我们所研究的问题更容易得到解决，同时还会获得一种能应用于有关问题的普遍方法. 这种寻求一般方法的途径肯定是最行得通也是最可靠的，因为手中没有明确的问题而去寻求一般方法的人，他们的工作多半是徒劳无益的.

在讨论数学问题时，我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用. 可能在大多数场合，我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因在于这样的事实，即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决. 这时，一切都有赖于找出这些比较容易的问题，并使用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们. 这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一，我认为人们是经常使用它的，虽然也许并不自觉.

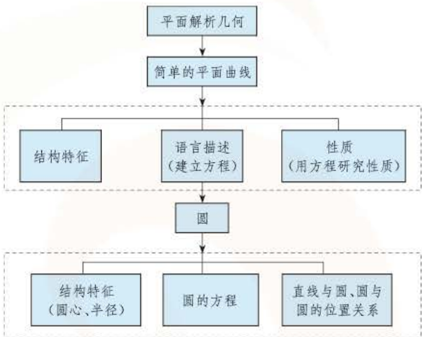
有时会碰到这样的情况：我们是在不充分的前提下或不正确的意义上寻求问题的解答，因此不能获得成功. 于是就会产生这样的任务：证明在所给的前提和所考虑的意义下原来的问题是不可能解决的.

说明：本文是德国数学家希尔伯特在1900年巴黎国际数学家代表会上的讲演的节选. 在这次大会上，希尔伯特提出了23个数学问题，对20世纪的数学发展产生了较大的影响.

本章回顾

本 章 概 览

本章再一次借助平面直角坐标系，运用坐标法，研究了圆的有关知识. 学习本章时，应该进一步体会用坐标法研究问题的一般思路和基本方法，也就是在明确了圆的定义，即圆上的点到圆心的距离为定值后，通过建立直角坐标系，将圆转化为方程，进而通过圆的方程等代数方法来研究点与圆、直线与圆、圆与圆之间的位置关系.



本章以圆为载体，再一次展示了坐标法这一研究几何曲线的重要数学方法，即通过坐标系，把圆与方程联系起来，沟通了圆与方程之间的联系，体现了数形结合的重要数学思想.

圆的标准方程和一般方程都含有三个参变量（标准方程中为 a，b，r；一般方程中为 D，E，F），也就是说，从解方程的角度看，要确定一个圆的方程，需要三个独立的条件，这与不共线的三点确定一个圆是一致的.

复习题

感受 · 理解

1. 已知圆经过点 $P(1, 1)$和坐标原点，且圆心在直线 $2x+3y+1=0$ 上，求圆的方程.

2. 已知圆经过三点 $A(1, 12)$，$B(7, 10)$，$C(-9,2)$，求圆的方程.

3. 已知直线 $3x-4y+12=0$ 与两坐标轴分别交于点 A, B,求以线段 AB 为直径的圆的方程.

4. 求圆 $x^2+y^2-4x+4y+4=0$ 被直线 $x-y-5=0$ 所截得的弦长.

5. 已知一直线与圆 C: $x^2+(y+5)^2=3$ 相切,且在 x 轴、y 轴上的截距相等,求此直线的方程.

6. 已知圆 C 的半径为 1,圆心在第一象限,若圆 C 与 y 轴相切,与 x 轴相交于点 A, B,且 $AB=\sqrt{3}$,求圆 C 的方程.

7. 判断两个圆 $x^2+y^2+x-2y-20=0$ 与 $x^2+y^2=25$ 的位置关系.

8. 若一个圆过点 $P(4,-1)$,且与圆 C: $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切于点 $M(1,2)$,求此圆的方程.

赵州桥

9. 河北省赵县的赵州桥,是世界上现存最古老的石拱桥之一.赵州桥的跨度约为 37.4 m,圆拱高约为 7.2 m. 试建立适当的直角坐标系,求出这个圆拱所在的圆的方程.

10. 已知圆 O: $x^2+y^2=1$ 和定点 $A(4,0)$, P 为圆 O 外一点,直线 PQ 与圆 O 相切于点 Q. 若 $PQ=2PA$,求点 P 的轨迹方程.

思考·运用

11. 已知 $M(1,0)$ 是圆 C: $x^2+y^2-4x-2y=0$ 内一点,求过点 M 的最短弦所在直线的方程.

12. 设 k 为实数,若直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 M, N 两点,且 $MN\geqslant 2\sqrt{3}$,求 k 的取值范围.

13. 光线沿直线 $3x+4y+6=0$ 射入,经过 x 轴反射后,反射光线与以点 $(2,8)$ 为圆心的圆 C 相切,求圆 C 的方程.

14. 已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ 相交于 A, B 两点,求直线 AB 的方程.

15. 设 r 为正实数,若集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$, $N=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant r^2\}$. 当 $M\cap N=N$ 时,求 r 的取值范围.

16. 设 b 为实数,若直线 $y=x+b$ 与曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 恰有一个公共点,求 b 的取值范围.

探究·拓展

17. 已知圆 C: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$,是否存在斜率为 1 的直线 l,使以 l 被圆 C 截得的弦 AB 为直径的圆过原点? 若存在,求出直线 l 的方程;若不存在,说明理由.

18. 已知直线 l: $x=-2$ 和圆 C: $(x-3)^2+y^2=1$. 若圆 M 与直线 l 相切,与圆 C 外切,求圆 M 的圆心 M 的轨迹方程.

本章测试

一、填空题

1. 圆心为点$(-1, 1)$，半径为 3 的圆的方程为____________.

2. 圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 的面积为________.

3. 经过两点$(3, 5)$和$(-3, 7)$，且圆心在 x 轴上的圆的方程为____________.

4. 圆 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 关于 x 轴对称的圆的方程为____________.

5. 设 m 为实数，若方程 $x^2+y^2-2x+4y+m=0$ 表示圆，则 m 的取值范围为________.

6. 圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 上的点到直线 $x-y=2$ 的距离的最大值为________.

二、选择题

7. 已知圆的内接正方形的一条对角线上的两个顶点的坐标分别是$(5, 6)$，$(3, -4)$，则这个圆的方程为(　　).

A. $x^2+y^2+4x-2y+7=0$　　B. $x^2+y^2-8x-2y-9=0$

C. $x^2+y^2+8x+2y-6=0$　　D. $x^2+y^2-4x+2y-5=0$

8. 过圆 $x^2+y^2=5$ 上一点 $M(1, -2)$作圆的切线 l，则 l 的方程为(　　).

A. $x+2y-3=0$　　B. $x-2y-5=0$

C. $2x-y-5=0$　　D. $2x+y-5=0$

9. 圆 O_1：$x^2+y^2-2x=0$ 与圆 O_2：$x^2+y^2+4y=0$ 的位置关系为(　　).

A. 外离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

10. 若圆 $(x+2\sqrt{3})^2+(y-2\sqrt{7})^2=r^2$ 与 x 轴相切，则这个圆截 y 轴所得的弦长为(　　).

A. $2\sqrt{7}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 6　　D. 8

三、解答题

11. 若圆 C 过两点 $A(0, 4)$，$B(4, 6)$，且圆心在直线 $x-2y-2=0$ 上，求圆 C 的标准方程.

12. 设 m 为实数，直线 $y=m(x-1)$ 和圆 C：$x^2+y^2-y=0$ 相交于 P，Q 两点，若 $PQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 m 的值.

13. 若圆 C 的圆心在直线 $3x+2y=0$ 上，且圆 C 与 x 轴的交点分别为$(-2, 0)$，$(6, 0)$，求圆 C 的方程.

14. 已知直线 l_1：$2x-y-3=0$，l_2：$x-2y+3=0$，若圆 C 的圆心在 x 轴上，且与直线 l_1，l_2 都相切，求圆 C 的方程.

15. 设 a 为实数，若直线 l 与圆 C：$x^2+y^2+2x-4y+a=0$ 相交于 A，B 两点，弦 AB 的中点为 $M(0, 1)$，求 a 的取值范围及直线 l 的方程.

说　　明

江苏凤凰教育出版社出版的《普通高中教科书・数学》是根据教育部制定的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需求.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设合适的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识,提升他们的数学学科核心素养.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法、核心素养四条主线,通过问题将全书贯通.每个主题围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最优发展.

衷心感谢 2004 年版《普通高中课程标准实验教科书・数学》(苏教版)的主编单墫教授,副主编李善良、陈永高、王巧林,以及所有编写的专家,审读、试教教师.

众多的数学家、心理学家、数学教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写与讨论工作.史宁中、鲍建生、谭顶良等教授对教科书编写提出许多建议,陈光立、于明等老师参与本书的编写设计与讨论,在此向他们表示衷心感谢!

感谢您使用本书,您在使用本书时有建议或疑问,请及时与我们联系,电话:025-83658737,电子邮箱:sjgzsx@126.com,lishanliang2019@126.com,466606351@qq.com.

本书编写组

2019 年 9 月

割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。

——刘徽