教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

SHU XUE

八年级 上册

江苏凤凰科学技术出版社

致 同 学

亲爱的少年朋友：

一个学年已经过去了，你们的知识也一定增长了．在七年级的数学学习中，如果你感觉很好，请记住“山外有山”，数学世界的奥秘还有待于进一步探索；如果你感到有困难，请相信“后来者能够居上”，努力永远不会嫌迟．让我们人人都充满自信地走进八年级的数学课程吧！

“全等三角形”将引导你探索全等图形的性质，以及两个三角形全等的条件；学习用演绎推理的方法证明两个三角形全等．

“轴对称图形”将引导你用数学的眼光观察、欣赏生活中许多漂亮的图案，把折纸等现象与图形的运动变化联系起来；在探索轴对称性质的基础上，进一步研究一些较复杂图形的性质，并学会用“对称”设计图案．

“勾股定理”将介绍人类的文明成果——勾股定理，进而学习勾股定理的逆定理，并应用它们解决一些简单的实际问题．

“实数”将引导你学习平方根、立方根，实数的概念及运算．

“平面直角坐标系”将介绍确定物体位置的方法，学习研究数量与位置之间关系的有效工具——平面直角坐标系．

“一次函数”将引导你探索一类事物中数量的关系和变化规律，了解研究函数的一些基本方法，并初步感受一次函数与二元一次方程之间的联系．

做做“实验”，与同学“讨论”；仔细“观察”，积极“探索”；认真“练习”，勤于“思考”；读读“读一读”及“阅读”材料，拓宽视野；把做与想更好地结合起来．

充满自信，选择适合自己的学习方法，会使你的数学学习不断取得成功！

目　录

第 1 章　全等三角形

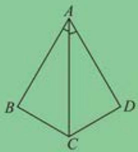
第 2 章　轴对称图形

第 3 章　勾股定理

第 4 章　实数

第 5 章　平面直角坐标系

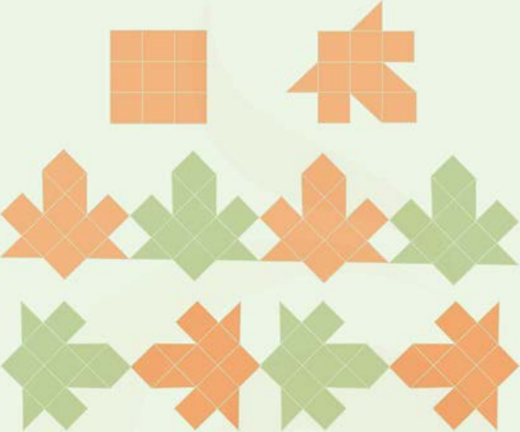
第1章　全等三角形



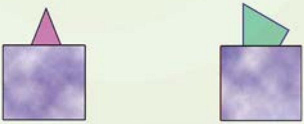
$\triangle ABC \cong \triangle ADC$

生活中处处可见全等的图案；
探索全等图形的性质，揭示它的奥秘．

用正方形纸片按图中所示的步骤制作若干个“枫叶”，再用它们拼成一幅由“枫叶”组成的图案．

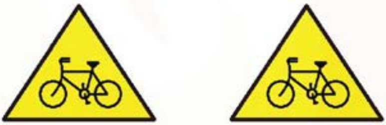


用纸板挡住了两个三角形的一部分，你能画出这两个三角形吗？如果能，你画的三角形与其他同学画的三角形的形状、大小相同吗？



本章将认识全等图形以及全等三角形，探索两个三角形全等的条件，探索并证明有关全等三角形的一些命题，学习有条理的思考和表达．

1.1 全等图形



像以上图案中的邮票、蝴蝶、交通标识，它们的形状、大小分别相同，分别能完全重合．日常生活中，你见过这样的图案吗？

能完全重合的图形叫做**全等图形**(congruent figures)．两个图形全等，它们的形状、大小相同．

观察图 1－1，从中找出全等图形．

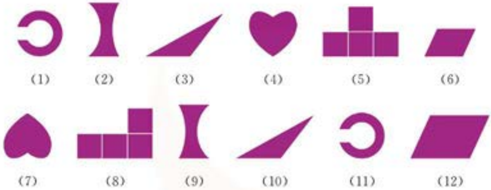
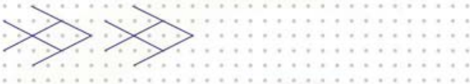


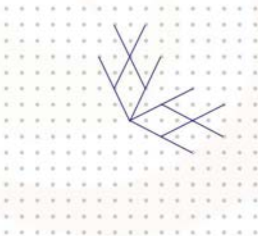
图 1－1

观察图 1－2(1)、(2)、(3)中的两个全等图形，怎样改变其中一个图形的位置可以与另一个图形完全重合？按照同样的方法，在图 1－2 中分别画出第 3 个、第 4 个图形．



(1)

(2)

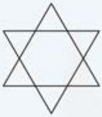


(3)

图 1－2

练习

1. 找出图中的全等图形.



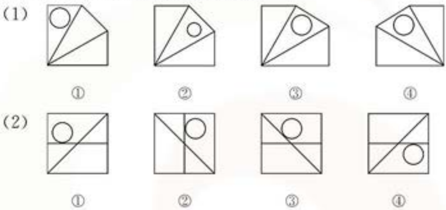
（第1题）

（第2题）

2. 用不同的方法沿网格线把正方形分割成两个全等的图形.

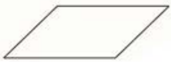
1.1 习题

1. 找出下列各组图中的全等图形.

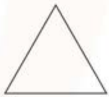


（第1题）

2. 用不同的方法把图中的平行四边形分成4个全等的图形.



（第2题）

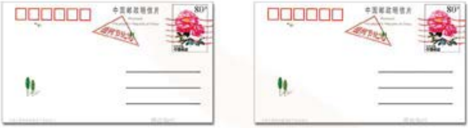


（第3题）

3. 把图中的等边三角形分成2个、3个、4个全等图形.

1.2 全等三角形

信封上盖的两个三角形纪念邮戳能够完全重合.



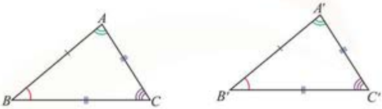


图 1－3

两个能完全重合的三角形叫做**全等三角形**(congruent triangles). 图 1－3 中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是全等三角形，记作“$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$”,读作“$\triangle ABC$ 全等于 $\triangle A'B'C'$”. 顶点 A 和 A'、B 和 B'、C 和 C' 叫做**对应顶点**(corresponding vertices)，AB 和 $A'B'$、BC 和 $B'C'$、AC 与 $A'C'$ 叫做**对应边**(corresponding sides)，$\angle A$ 和 $\angle A'$、$\angle B$ 和 $\angle B'$、$\angle C$ 和 $\angle C'$ 叫做**对应角**(corresponding angles).

表示两个三角形全等时，通常把对应顶点的字母写在对应的位置上.

全等三角形的对应边相等，对应角相等.

操作

用硬纸片剪一个三角形，在白纸上画一个与三角形纸片全等的 $\triangle ABC$，并把三角形纸片与 $\triangle ABC$ 叠合在一起.

(1) 把三角形纸片沿 AB 所在直线平移一定的距离，画出所得的 $\triangle A'B'C'$；

(2) 把三角形纸片沿 AC 所在直线翻折，画出所得到的 $\triangle AB'C$；

(3) 把三角形纸片绕顶点 A 旋转 180°，画出所得到的 $\triangle AB'C'$.

讨论

怎样改变图 1－4(1) 中 $\triangle ABC$ 的位置，使它与 $\triangle DEF$ 重合？

怎样改变图 1－4(2) 中 $\triangle ABC$ 的位置，使它与 $\triangle DBC$ 重合？

怎样改变图 1－4(3) 中 $\triangle ABC$ 的位置，使它与 $\triangle DEC$ 重合？

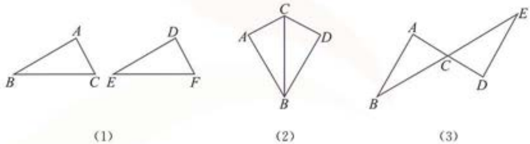
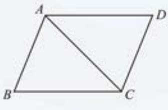


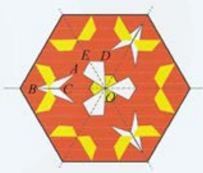
图 1－4

练习

1. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，写出图中相等的边和角.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 怎样改变图案中 $\triangle ABC$、$\triangle DOE$ 的位置，才能与其他相应的三角形重合？

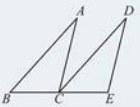
阅读

图形的运动

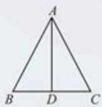
图(1)中，点 B、C、E 在一条直线上，$\triangle ABC \cong \triangle DCE$．我们只需把$\triangle ABC$ 沿直线 BC 平移 BC 的长度，就能使$\triangle ABC$ 与$\triangle DCE$ 完全重合．

图(2)中，点 B、D、C 在一条直线上，$\triangle ABD \cong \triangle ACD$．我们只需把$\triangle ABD$ 沿 AD 所在直线翻折，就能使$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 完全重合．

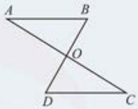
图(3)中，AC、BD 相交于点 O，$\triangle AOB \cong \triangle COD$．我们只需把$\triangle AOB$ 绕点 O 旋转 $180°$，就能使$\triangle AOB$ 与$\triangle COD$ 完全重合．



图(1)



图(2)



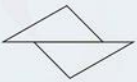
图(3)

图形的运动(平移、翻折、旋转)只改变图形的位置，不改变图形的形状、大小，运动前、后的两个图形全等．

一个图形经过多次平移、旋转、翻折，所得到的图形与运动前的图形仍然全等．

试分别说出图(4)～图(9)中的一个三角形经过怎样的运动就与另一个三角形重合．


图(4)


图(5)


图(6)

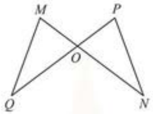

图(7)


图(8)

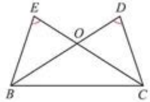

图(9)

1.2 习题

1. 如图，$\triangle OMQ \cong \triangle OPN$，写出这两个三角形中的对应边和对应角．

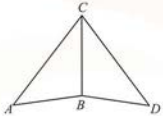


（第1题）



（第2题）

2. 如图，$\triangle BCE \cong \triangle CBD$，写出这两个三角形中的对应边和对应角．
3. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DBC$，$\angle A = 45^\circ$，$\angle ACD = 76^\circ$．求$\triangle BCD$各内角的度数．



（第3题）

1.3 探索三角形全等的条件

我们知道，如果两个三角形全等，那么它们的对应边相等、对应角相等．反过来，当两个三角形具备多少对边或角分别相等的条件时，这两个三角形就全等呢？

1. 当两个三角形的 1 对边或角相等时，它们全等吗？
2. 当两个三角形的 2 对边或角分别相等时，它们全等吗？
3. 当两个三角形的 3 对边或角分别相等时，它们全等吗？

1. 如图 1－5，每人用一张长方形纸剪一个直角三角形，怎样剪才能使剪下的所有直角三角形都能够重合？

图 1－5

2. 在图 1－6 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$、$\triangle MNP$ 能完全重合吗？

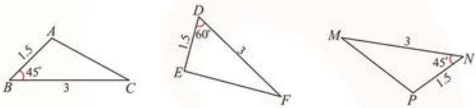
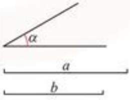


图 1－6

按下列作法，用直尺和圆规作$\triangle ABC$，使 $\angle A = \angle\alpha$，$AB = a$，$AC = b$.

作　法	图　形
1. 作$\angle MAN=\angle\alpha$. 2. 在射线 AM、AN 上分别作线段 $AB=a$，$AC=b$. 3. 连接 BC. $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形．	

你作的三角形与其他同学作的三角形能完全重合吗？

实践告诉我们判定两个三角形全等的一个**基本事实**：

两边及其夹角分别相等的两个三角形全等(可以简写成**“边角边”**或**“SAS”**).

例1 已知：如图1-7，$AB=AD$，$\angle BAC=\angle DAC$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

证明： 在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

$$\begin{cases} AB=AD(\text{已知}), \\ \angle BAC=\angle DAC(\text{已知}), \\ AC=AC(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC(\text{SAS})$.

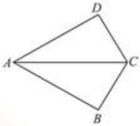
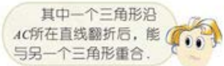
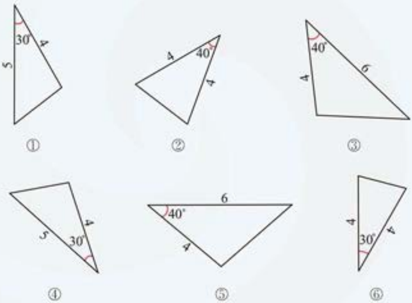


图1-7



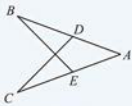
1. 找出图中的全等三角形，并说明理由：



(第1题)

2. 已知：如图，$AB=AC$，点D、E分别在AB、AC上，且$AD=AE$.

   求证：$\triangle ABE \cong \triangle ACD$.



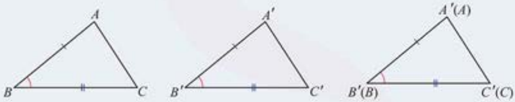
(第2题)

读一读

图形的运动与“SAS”

本节中，我们知道了判定两个三角形全等的一个基本事实——两边及其夹角分别相等的两个三角形全等(SAS). 其实，我们可以用图形运动的方法来确认它的正确性.

如图(1)，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB = A'B'$，$\angle B = \angle B'$，$BC = B'C'$.



(1)　　　　(2)

把$\triangle ABC$叠合到$\triangle A'B'C'$上，使BC与$B'C'$重合，$\angle B$、$\angle B'$落在BC的同一侧.

因为$\angle B = \angle B'$，所以BA落在射线$B'A'$上. 又因为$BA = B'A'$，所以点A与点A'重合. 根据“两点确定一条直线”，可以知道AC与$A'C'$重合. 于是$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$重合(如图(2))，即$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

试仿照上面的方法，证实本节例1中的结论.

例2　已知：如图1－8，AB、CD相交于点E，且E是AB、CD的中点.

求证：$\triangle AEC \cong \triangle BED$.

证明：$\because$ E是AB、CD的中点(已知)，

$\therefore$ $AE = BE$，$CE = DE$(线段中点的定义).

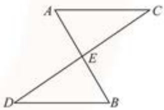


图1－8

在$\triangle AEC$和$\triangle BED$中，

$$\begin{cases} AE = BE\text{(已证)}, \\ \angle AEC = \angle BED\text{(对顶角相等)}, \\ CE = DE\text{(已证)}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AEC \cong \triangle BED$(SAS).

其中一个三角形绕点E旋转180°后，能与另一个三角形重合.

讨论

你能证明图 1－8 中 $AC /\!/ DB$ 吗？

例 3　已知：如图 1－9，点 E、F 在 CD 上，且 $CE = DF$，$AE = BF$，$AE /\!/ BF$.

求证：$\triangle AEC \cong \triangle BFD$.

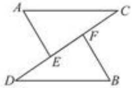


图 1－9

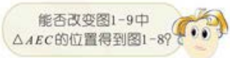
证明： $\because$ $AE /\!/ BF$（已知），

$\therefore$ $\angle AEC = \angle BFD$（两直线平行，内错角相等）.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BFD$ 中，

$$\begin{cases} AE = BF（已知）, \\ \angle AEC = \angle BFD（已证）, \\ CE = DF（已知）, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AEC \cong \triangle BFD$（SAS）.



讨论

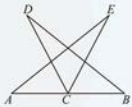
根据例 3 中的已知条件，你还能证得其他新的结论吗？

练习

填空（第 1、2 题）：

1. 已知：如图，C 是 AB 的中点，$AE = BD$，$\angle A = \angle B$.

　求证：$\angle E = \angle D$.



（第 1 题）

　证明：$\because$ C 是 AB 的中点（已知），

　$\therefore$ ________ = ________（　　　　　　）.

　在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BDC$ 中，

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_（\qquad\qquad）, \\ \angle\_\_\_\_\_\_ = \angle\_\_\_\_\_\_（\qquad\qquad）, \\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_（\qquad\qquad）, \end{cases}$$

　$\therefore$ $\triangle AEC \cong \triangle BDC$（　　　　　　）.

　$\therefore$ $\angle E = \angle D$（　　　　　　）.

2. 已知：如图，点 D 在 AE 上，$BD = CD$，$\angle BDE = \angle CDE$.

　求证：$AB = AC$.

　证明：$\because$ $\angle BDE + \angle$ ________ $= 180°$，

　$\angle CDE + \angle$ ________ $= 180°$（平角的定义），

$\angle BDE=\angle CDE$(已知),

$\therefore \angle$ ______ $=\angle$ ______(　　　　　　).

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中,

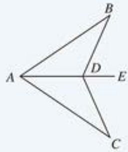
______ = ______(　　　　　　),

$\angle$ ______ $=\angle$ ______(　　　　　　),

______ = ______(　　　　　　),

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$(　　　　).

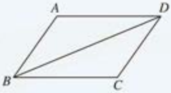
$\therefore AB=AC$(　　　　　　).



(第2题)

3. 已知：如图，$AB\parallel CD$，$AB=CD$.

求证：$AD\parallel BC$.



(第3题)

1. 用纸板挡住了两个三角形的一部分，你能画出这两个三角形吗？如果能，你画的三角形与其他同学画的三角形能完全重合吗？

2. 在图1-10中，$\triangle ABC$与$\triangle PQR$、$\triangle DEF$能完全重合吗？

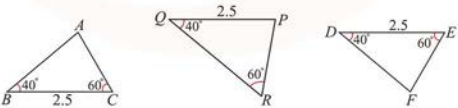
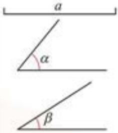


图1-10

操作

按下列作法，用直尺和圆规作$\triangle ABC$，使 $AB = a$，$\angle A = \angle\alpha$，$\angle B = \angle\beta$.

作　法	图　形
1. 作 $AB = a$. 2. 在 AB 的同一侧分别作 $\angle MAB = \angle\alpha$，$\angle NBA = \angle\beta$，$AM$、$BN$ 相交于点 C. $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.	

你作的三角形与其他同学作的三角形能完全重合吗？

实践告诉我们判定两个三角形全等的又一个**基本事实**：

两角及其夹边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“**角边角**”或“**ASA**”）.

例 4　已知：如图 1－11，在$\triangle ABC$中，D 是 BC 的中点，点 E、F 分别在 AB、AC 上，且 $DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$.

求证：$BE = DF$，$DE = CF$.

分析： 要证 $BE = DF$，$DE = CF$，只要证 $\triangle EBD \cong \triangle FDC$. 由于在$\triangle EBD$和$\triangle FDC$中，已知 $BD = DC$，所以只要证 $\angle B = \angle FDC$，$\angle EDB = \angle C$.

证明： $\because$ $DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$（已知），

$\therefore$ $\angle EDB = \angle C$，$\angle B = \angle FDC$（两直线平行，同位角相等）.

$\because$ D 是 BC 的中点（已知），

$\therefore$ $BD = DC$（线段中点的定义）.

在$\triangle EBD$和$\triangle FDC$中，

$$\begin{cases} \angle EDB = \angle C（已证）, \\ BD = DC（已证）, \\ \angle B = \angle FDC（已证）, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle EBD \cong \triangle FDC$（ASA）.

$\therefore$ $BE = DF$，$DE = CF$（全等三角形的对应边相等）.

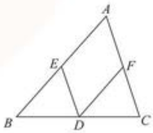
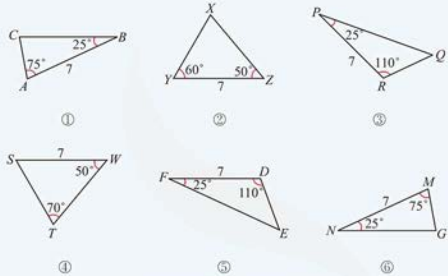


图 1－11

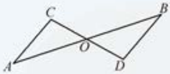
练习

1. 找出图中的全等三角形，并说明理由．



（第 1 题）

2. 已知：如图，AB、CD 相交于点 O，O 是 AB 的中点，$AC // BD$．
求证：O 是 CD 的中点．



（第 2 题）

思考

如图 1－12，在$\triangle ABC$ 和$\triangle MNP$ 中，$\angle A=\angle M$，$\angle B=\angle N$，$BC=NP$．$\triangle ABC$ 与$\triangle MNP$ 全等吗？为什么？

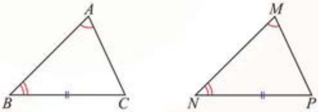


图 1－12

由三角形内角和定理可知$\angle C=\angle P$．

根据“ASA”可以证明$\triangle ABC \cong \triangle MNP$．

由此可以得到基本事实（ASA）的推论：

两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）.

例5　已知：如图1－13，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$、$A'D'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的高.

求证：$AD = A'D'$.

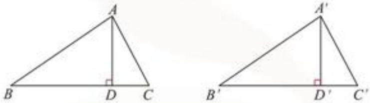


图1－13

分析：要证$AD = A'D'$，只要证$\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. 由于在$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$中，$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$，所以只要证$AB = A'B'$，$\angle B = \angle B'$.

证明：$\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（已知），

$\therefore AB = A'B'$，$\angle B = \angle B'$（全等三角形的对应边相等、对应角相等）.

$\because AD$、$A'D'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的高（已知），

$\therefore \angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$.

在$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle B'（已证），\\ \angle ADB = \angle A'D'B'（已证），\\ AB = A'B'（已证），\end{cases}$$

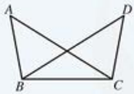
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$（AAS）.

$\therefore AD = A'D'$（全等三角形的对应边相等）.

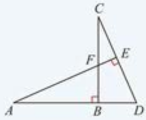
在图1－13中，如果AD、$A'D'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的角平分线（或中线），那么AD与$A'D'$相等吗？试证明你的结论.

练习

1. 已知：如图，$\angle A=\angle D$，$\angle ACB=\angle DBC$.
   求证：$AB=DC$.



（第1题）



（第2题）

2. 已知：如图，$CB\perp AD$，$AE\perp DC$，垂足分别为 B、E，AE、BC 相交于点 F，且 $AB=BC$.
   求证：$\triangle ABF\cong\triangle CBD$.

讨论

1. 如图 1－14，$\angle A=\angle B$，$\angle 1=\angle 2$，$EA=EB$. 你能证明 $AC=BD$ 吗?

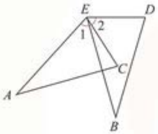


图 1－14

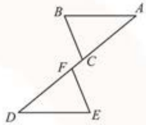


图 1－15

2. 如图 1－15，点 C、F 在 AD 上，且 $AF=DC$，$\angle B=\angle E$，$\angle A=\angle D$. 你能证明 $AB=DE$ 吗?

例 6 已知：如图 1－16，点 A、B、C、D 在一条直线上，$EA\parallel FB$，$EC\parallel FD$，$EA=FB$.

求证：$AB=CD$.

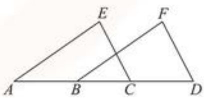


图 1－16

分析： 要证 $AB = CD$，只要证 $AB + BC = CD + BC$，即 $AC = BD$. 所以只要证 $\triangle EAC \cong \triangle FBD$.

证明： $\because$ $EA \parallel FB$，$EC \parallel FD$（已知），

$\therefore$ $\angle A = \angle FBD$，$\angle ECA = \angle D$（两直线平行，同位角相等）.

在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle FBD$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle FBD（已证）, \\ \angle ECA = \angle D（已证）, \\ EA = FB（已知）, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle EAC \cong \triangle FBD$（AAS）.

$\therefore$ $AC = BD$（全等三角形的对应边相等），

即　$AB + BC = CD + BC$.

$\therefore$ $AB = CD$（等式的性质）.

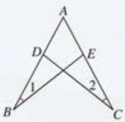
上面的推理过程可以用符号“⇒”简明地表述如下：

$$\left.\begin{array}{r} EA \parallel FB \Rightarrow \angle A = \angle FBD \\ EC \parallel FD \Rightarrow \angle ECA = \angle D \\ EA = FB \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle EAC \cong \triangle FBD \Rightarrow AC = BD$$

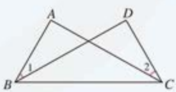
$$\Rightarrow AB + BC = CD + BC \Rightarrow AB = CD$$

练习

1. 已知：如图，$AB = AC$，点 D、E 分别在 AB、AC 上，$\angle 1 = \angle 2$.
   求证：$DB = EC$.



（第 1 题）

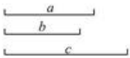


（第 2 题）

2. 已知：如图，$\angle ABC = \angle DCB$，$\angle 1 = \angle 2$.
   求证：$AB = DC$.

操作

按下列作法，用直尺和圆规作△ABC，使 $AB = c$，$AC = b$，$BC = a$.

作　法	图　形
1. 作线段 $BC=a$. 2. 分别以点 B、C 为圆心，c、b 的长为半径画弧，两弧相交于点 A. 3. 连接 AB、AC. △ABC 就是所求作的三角形.	

你作的三角形与其他同学作的三角形能完全重合吗？

实践告诉我们判定两个三角形全等的第三个**基本事实**：

三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“**边边边**”或“**SSS**”）.

生活经验告诉我们，如果一个三角形三边的长度确定，那么这个三角形的形状和大小就完全确定. 如图 1－17，用 3 根木条钉成的三角形框架，它的形状和大小唯一确定. 这个事实也说明了“三边分别相等的两个三角形全等”.

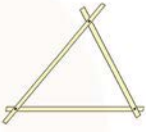


图 1－17

三角形的这个性质叫做三角形的稳定性.

三角形的稳定性在生活和生产中有着广泛的应用.

工地塔吊

空调架

讨论

四边形是否具有稳定性？

四边形不具有稳定性，也就是说，当一个四边形四边的长度确定时，这个四边形的形状、大小不唯一确定 .

例 7　已知：如图 1－18，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

分析： 要证$\angle B=\angle C$，只要设法使$\angle B$、$\angle C$分别在两个三角形中，然后证明这两个三角形全等 .

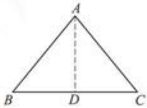


图 1－18

证明： 作$\triangle ABC$的中线AD.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases} AB=AC(\text{已知}), \\ BD=CD(\text{辅助线作法}), \\ AD=AD(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$(SSS).

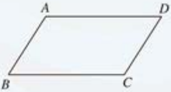
$\therefore \angle B=\angle C$(全等三角形的对应角相等).

思考

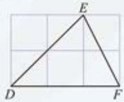
还有不同的方法证明$\angle B=\angle C$吗？

练习

1. 三对内角分别相等的两个三角形全等吗？
2. 已知：如图，$AB=DC$，$AD=BC$. 求证：$AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\triangle DEF$的 3 个顶点分别在小正方形的顶点（格点）上，这样的三角形叫做格点三角形．请在图中再画1个格点三角形ABC，使$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. 这样的格点三角形你能画几个？

思考

工人师傅常常利用角尺平分一个角．如图 1－19，在$\angle AOB$ 的两边 OA、OB 上分别任取 $OC = OD$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与点 C、D 重合，这时过角尺顶点 M 的射线 OM 就是$\angle AOB$ 的平分线．请你说明这样画角平分线的道理．

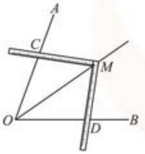
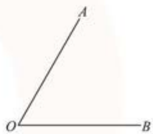


图 1－19

从木工师傅的画法中，你能找到用直尺和圆规作角平分线的方法吗？

按下列作法，用直尺和圆规作$\angle AOB$ 的平分线．

作　法	图　形
1. 以点 O 为圆心，任意长为半径作弧，分别交射线 OA、OB 于点 C、D. 2. 分别以点 C、D 为圆心，大于$\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧，两弧在$\angle AOB$ 的内部交于点 M. 3. 作射线 OM. OM 就是$\angle AOB$ 的平分线．	

讨论

如图 1－20，$PC = PD$，$QC = QD$，PQ、CD 相交于点 E.

（1）根据以上条件，你能发现哪些结论？

（2）你能证明 $PQ \perp CD$ 吗？

由此，你能找到用直尺和圆规过已知直线外一点作这条直线的垂线的方法吗？

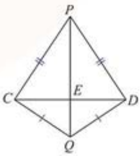
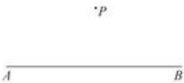


图 1－20

按下列作法，用直尺和圆规经过直线 AB 外一点 P 作 AB 的垂线．

作　法	图　形
1. 以点 P 为圆心，适当的长为半径作弧，使它与 AB 交于点 C、D. 2. 分别以点 C、D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧，两弧交于点 Q. 3. 作直线 PQ. 直线 PQ 就是经过直线 AB 外一点 P 的 AB 的垂线．	

思考

如果点 P 在直线 AB 上，如何用直尺和圆规经过点 P 作 AB 的垂线？

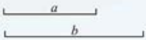
练习

1. (1) 用直尺和圆规把图①中的 $\angle MON$ 四等分；
   (2) 用直尺和圆规在图②中过点 B 作 BC 的垂线，并指出所作图中 $\angle ABC$ 的余角．

①　　②

(第1题)

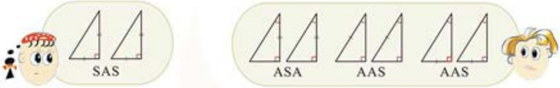
2. 用直尺和圆规作一个直角三角形，使它的两条直角边分别等于 a、b.



(第2题)

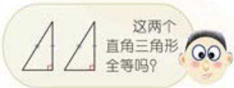
讨论

两个直角三角形，有一对内角(直角)相等，判定两个直角三角形全等，还需要几个条件？可以是哪些条件？



直角三角形是特殊的三角形，可以用符号“Rt△”表示.

判定两个直角三角形全等，有没有特殊的方法？



操作

按下列作法，用直尺和圆规作 Rt$\triangle ABC$，使 $\angle C=90^\circ$，$CB=a$，$AB=c$.

作　法	图　形
1. 作 $\angle PCQ=90^\circ$. 2. 在射线 CP 上截取 $CB=a$. 3. 以点 B 为圆心，c 的长为半径作弧交射线 CQ 于点 A. 4. 连接 AB. Rt$\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.	a c

你作的直角三角形与其他同学作的直角三角形能完全重合吗？

讨论

如图 1－21，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90^\circ$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，怎样证明 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$？

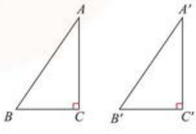
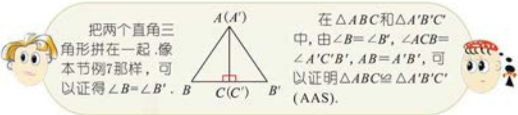


图 1－21



于是，我们得到如下定理：

斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.

例 8　已知：如图 1－22，AD、BC 相交于点 O，$AD=BC$，$\angle C=\angle D=90^\circ$.

求证：$AO=BO$，$CO=DO$.

分析： 要证 $AO=BO$、$CO=DO$，只要证 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$. 由于 $\angle C=\angle D=90^\circ$，$\angle AOC=\angle BOD$，于是只要证 $AC=BD$，所以就要证 $\triangle ABC\cong\triangle BAD$.

证明： 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中，$\angle C=\angle D=90^\circ$，

$$\begin{cases} BC=AD(\text{已知}), \\ AB=BA(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABC\cong\text{Rt}\triangle BAD(\text{HL})$.

$\therefore AC=BD$（全等三角形的对应边相等）.

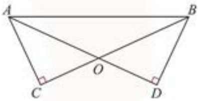


图 1－22

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，

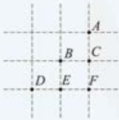
$$\begin{cases} \angle C=\angle D(\text{已知}), \\ \angle AOC=\angle BOD(\text{对顶角相等}), \\ AC=BD(\text{已证}), \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOD(\text{AAS})$.

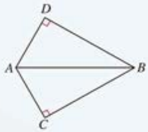
$\therefore AO=BO$，$CO=DO$（全等三角形的对应边相等）.

练习

1. 如图，方格纸中有点 A、B、C、D、E、F，以其中的 3 个点为顶点，画出所有的直角三角形，并找出其中全等的直角三角形.



（第 1 题）

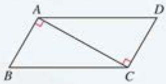


（第 2 题）

2. 如图，$AC \perp CB$，$AD \perp DB$，要证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$，还需要什么条件?

3. 已知：如图，$AD = BC$，$CA \perp AB$，$AC \perp CD$.

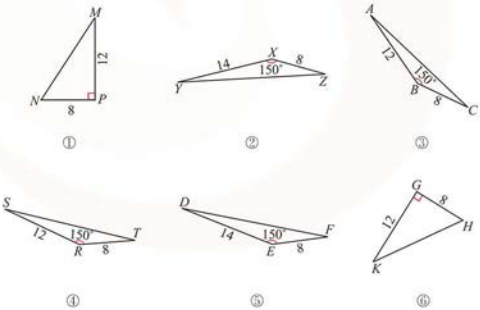
   求证：$AD \parallel BC$.



（第 3 题）

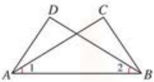
1.3 习题

1. 指出图中的全等三角形，并说明理由.

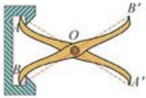


（第 1 题）

2. 已知：如图，$AC = BD$，$\angle 1 = \angle 2$.
求证：$\triangle ADB \cong \triangle BCA$.



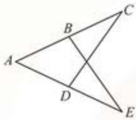
（第2题）



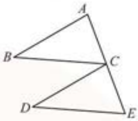
（第3题）

3. 如图，工人师傅常用“卡钳”这种工具测定工件内槽的宽．卡钳由两根钢条 AA'、BB'组成，O 为 AA'、BB'的中点．只要量出 $A'B'$的长度，就可以知道工件内槽 AB 的长度．你能说明这样测量的理由吗？

4. 已知：如图，B、D 分别是 AC、AE 的中点，且 $AB = AD$.
求证：$\triangle ADC \cong \triangle ABE$.



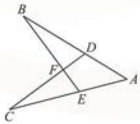
（第4题）



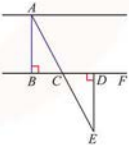
（第5题）

5. 已知：如图，C 是 AE 的中点，$AB \parallel CD$，且 $AB = CD$.
求证：$BC \parallel DE$.

6. 如图，点 D、E 分别在 AB、AC 上，BE、CD 相交于点 F.
(1) 如果 $AB = AC$，$\angle B = \angle C$，试找出一对全等三角形，并证明；
(2) 如果 $BD = CE$，$\angle B = \angle C$，试找出一对全等三角形，并证明．



（第6题）

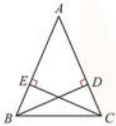


（第7题）

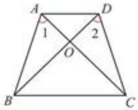
7. 如图，要测量河两岸相对的 A、B 两点之间的距离，可以在与 AB 垂直的河岸 BF 上取 C、D 两点，且使 $BC = DC$．从点 D 出发沿

与河岸BF垂直的方向移动到点E，使点A、C、E在一条直线上．测量DE的长就能知道A、B两点之间的距离．为什么？

8. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，BD、CE是高．
求证：$BD = CE$.



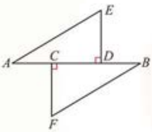
（第8题）



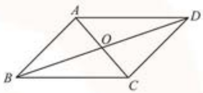
（第9题）

9. 已知：如图，在四边形$ABCD$中，AC、BD相交于点O，$AB = DC$，$\angle 1 = \angle 2$.
求证：$AC = DB$.

10. 已知：如图，$ED \perp AB$，$FC \perp AB$，垂足分别为D、C，$AE \parallel BF$，且$AE = BF$.
求证：$AC = BD$.



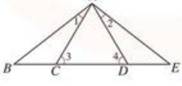
（第10题）



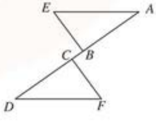
（第11题）

11. 如图，在四边形$ABCD$中，AC、BD相交于点O，$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$. 请在图中找出全等三角形，并证明．

12. 如图，点C、D在BE上，$BC = ED$，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$. 图中有哪些全等三角形？请分别加以证明．



（第12题）



（第13题）

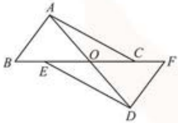
13. 已知：如图，点A、B、C、D在一条直线上，$AC = DB$，$AE = DF$，

$BE = CF$.

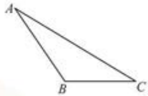
求证：$AE \parallel DF$，$BE \parallel CF$.

14. 已知：如图，AD、BF相交于点O，$AB=DF$. 点E、C在BF上，且$BE = FC$，$AC = DE$.

求证：$AO = DO$，$BO = FO$.



（第14题）



（第15题）

15. 如图，已知$\triangle ABC$，用直尺和圆规作$\triangle ABC$的角平分线CD、高AE.

16. 如图，已知$\triangle ABC$.

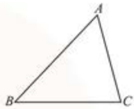
(1) 用直尺和圆规按下列要求作图：

作$\triangle ABC$的角平分线AD；

作$\angle CBE = \angle ADC$，BE交CA的延长线于点E；

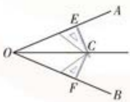
作$AF \perp BE$，垂足为F.

(2) 图中EF、BF相等吗？证明你的结论.

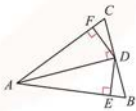


（第16题）

17. 用三角尺可以按下面的方法画$\angle AOB$的平分线：在OA、OB上分别取点E、F，使$OE = OF$；再分别过点E、F画OA、OB的垂线，这两条垂线相交于点C；画射线OC（如图）. 试说明射线OC平分$\angle AOB$的道理.



（第17题）



（第18题）

18. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，AD是高，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别为E、F.

求证：$DE = DF$.

数学活动

关于三角形全等的条件

本章中，我们学习了判定两个三角形全等的 3 个基本事实(SAS、ASA、SSS)、1 个推论(AAS)，以及直角三角形全等的判定定理(HL)．这 5 种判定方法中，两个三角形都具备 3 对元素(边或角)分别相等的条件．

问题 1　在两个三角形中，如果有 3 对元素分别相等，那么它们是否全等?

为了探究这个问题，我们不妨先把两个三角形中有 3 对元素分别相等的可能情况分类，然后分别研究．

两个三角形有 3 对元素分别相等：
- 三角分别相等；
- 一边和两角分别相等；
- 两边和一角分别相等；
- 三边分别相等．

根据三角形内角和定理，“三角分别相等”实质上是“两角分别相等”，不能由此条件判定两个三角形全等．

三边分别相等的两个三角形全等．

一边和两角分别相等的两个三角形是否一定全等呢?

如图 1－23，在$\triangle ABC$的边BC上截取$BC'=AC$，过点C'画CA的平行线交AB于点A'．在$\triangle A'BC'$和$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle B$，$\angle BA'C'=\angle A$，$BC'=AC$，显然这两个三角形不全等．对此，你能否做出合理的解释?

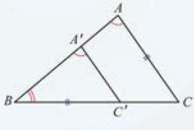


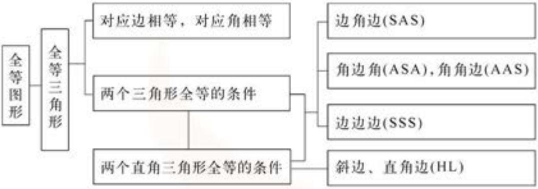
图 1－23

现在，请你探究：两边和一角分别相等的两个三角形是否一定全等．

问题 2　在两个三角形中，如果有 4 对(或 5 对)元素分别相等，那么这两个三角形一定全等吗?

小结与思考

1. 本章知识结构：



2. 全等三角形具有“对应边相等，对应角相等”的性质；判定两个三角形全等，通常需要 3 个条件，其中至少要有 1 对边相等．本章中用判定两个三角形全等的基本事实及推论，证明了有关全等三角形的一些命题．证明过程必须言必有据，证明过程的表达必须清晰、简明、有条理．全等三角形的性质与判定有什么关系？

3. 本章探索了用直尺和圆规平分已知角、过一点作已知直线的垂线，你能说明这些作图的道理吗？

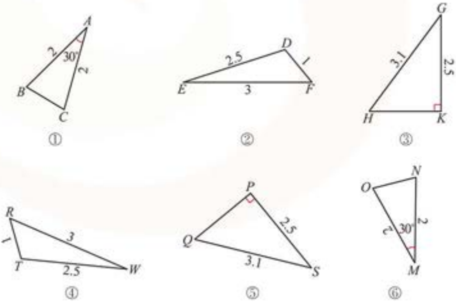
4. 确认图形的性质，通常运用推理的方法，有时也可以运用图形运动的方法．本章中，我们通过图形的运动探索并确认了一些图形的性质．

5. 举例说明三角形全等在生活中的应用．

复习题

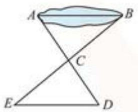
复习巩固

1. 指出图中的全等三角形，并说明理由．

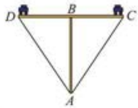


（第 1 题）

2. 如图，小明和小丽用下面的方法测量位于池塘两端的 A、B 两点的距离：先取一个可以直接到达点 A 和点 B 的点 C，量得 AC 的长度，再沿 AC 方向走到点 D 处，使 $CD=AC$；用同样的方法确定点 E，量得的 DE 的长度就是 A、B 两点的距离，试说明理由．



（第 2 题）

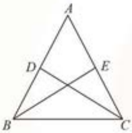


（第 3 题）

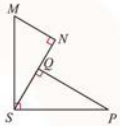
3. 如图，两车从路段 AB 的一端 B 出发，沿着与 AB 垂直的路段 DC 反向行驶相同的距离，到达 C、D 两地．此时点 C、D 到点 A 的距离相等吗？为什么？

4. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，BE、CD 是中线．

求证：$BE = CD$.



（第 4 题）



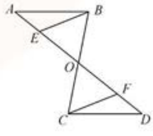
（第 5 题）

5. 已知：如图，$MS \perp PS$，$MN \perp SN$，$PQ \perp SN$，垂足分别为 S、N、Q，且 $MS = PS$.

求证：$\triangle MNS \cong \triangle SQP$.

6. 已知：如图，$AB \parallel CD$，$AB = CD$，AD、BC 相交于点 O，点 E、F 在 AD 上，且 $BE \parallel CF$.

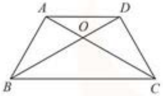
求证：$BE = CF$.



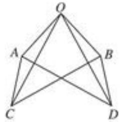
（第 6 题）

7. 已知：如图，$AB = DC$，$AC = DB$，AC、DB 相交于点 O.

求证：$\triangle AOB \cong \triangle DOC$.



（第7题）



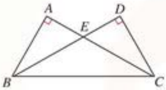
（第8题）

8. 已知：如图，$\triangle AOD \cong \triangle BOC$.

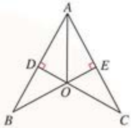
求证：$\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

灵活运用

9. 如图，$\angle A = \angle D = 90^\circ$，$AB = DC$，$AC$、$BD$ 相交于点 E，找出图中相等的锐角，并加以证明．



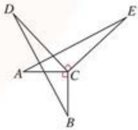
（第9题）



（第10题）

10. 如图，$CD \perp AB$，$BE \perp AC$，垂足分别为 D、E，BE、CD 相交于点 O. 如果 $AB = AC$，那么图中有几对全等的直角三角形？试证明你的结论．

11. 如图，$AC \perp BC$，$DC \perp EC$，$AC = BC$，$DC = EC$. 图中 AE、BD 有怎样的数量关系和位置关系？试证明你的结论．



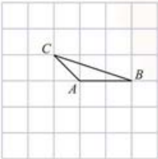
（第11题）

探索研究

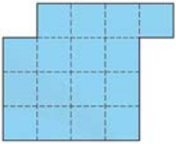
12. 如图，$\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 都在小正方形的顶点上，试在方格纸上按下列要求画格点三角形：

(1) 所画的三角形与$\triangle ABC$ 全等且有 1 个公共顶点 C；

(2) 所画的三角形与$\triangle ABC$ 全等且有 1 条公共边 AB.



（第 12 题）

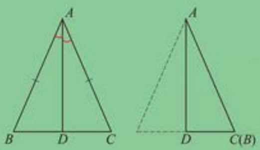


（第 13 题）

13. 在图中沿正方形的网格线把这个图形分割成两个全等形，你有几种不同的分割方法？

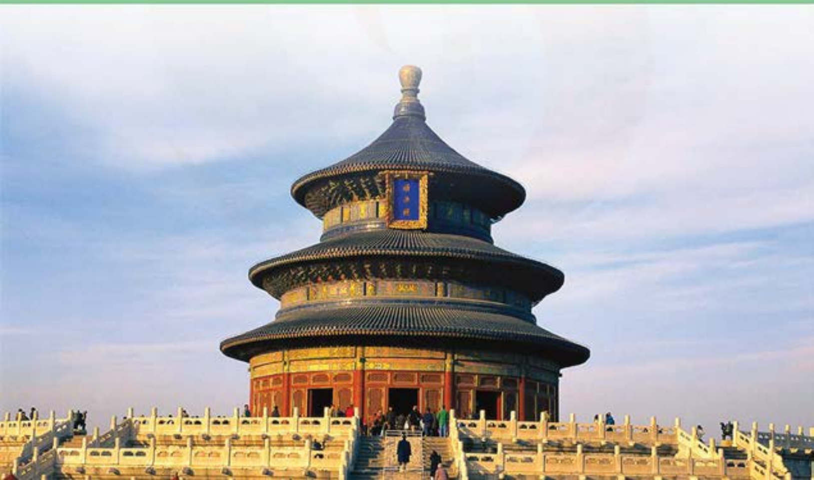
14. 你能用刻度尺画一个已知角的平分线吗？画出图形，并说明画法的道理.

第2章 轴对称图形

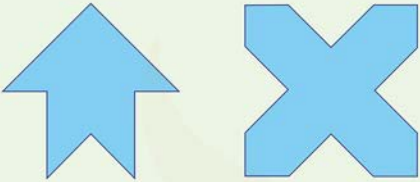


$AD \perp BC, BD = CD$

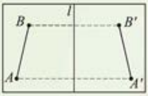
建筑大观、剪纸作品……展示着轴对称的美，利用轴对称性可以探索并证明图形的性质．



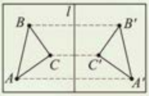
观察下面的图案，动手折一折，再把它们剪出来，并与同学交流．



把一张纸折叠后，用针扎两个孔；再把纸展开，针孔分别记为点 A、点 A'、点 B、点 B'，折痕记为 l；连接 AA'、BB'（如图(1)）．线段 AA'、线段 BB' 与折痕 l 有什么关系？



(1)



(2)

仿照上面的操作，再扎孔、展开、标记、连线(如图(2))．线段 CC' 与折痕 l 有什么关系？

本章将学习轴对称和轴对称图形，探索并证明线段、角以及等腰三角形等轴对称图形的性质．

2.1　轴对称与轴对称图形

观察图 2－1 中的图案，它们有什么共同特征？

(1)　　　　(2)

图 2－1

仿照图 2－2 进行操作，你有什么发现？

一滴墨水　　　　折纸压平　　　　重新展开

图 2－2

把一个图形沿着某一条直线翻折，如果它能够与另一个图形重合，那么称这两个图形关于这条直线对称，也称这两个图形成**轴对称**(line symmetry)，这条直线叫做**对称轴**(axis of symmetry).

如图 2－3，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 关于直线 MN 对称，直线 MN 是对称轴，点 A 与点 D、点 B 与点 E、点 C 与点 F 都是关于直线 MN 的对称点.

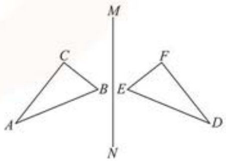


图 2－3

观察图 2－4 中的图案，它们有什么共同特征？

图 2－4

把一个图形沿着某一条直线折叠，如果直线两旁的部分能够互相重合，那么称这个图形是**轴对称图形**(axially symmetric figure)，这条直线就是对称轴．

你能画出图 2－4 中各图的对称轴吗？

两个图形成轴对称与一个图形是轴对称图形既有区别又有联系．

如果把成轴对称的两个图形看成一个整体，那么这个整体就是一个轴对称图形．

如果把一个轴对称图形位于对称轴两旁的部分看成两个图形，那么这两部分图形就成轴对称．

操作

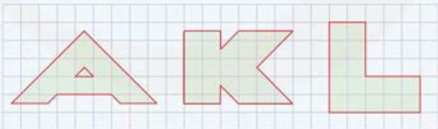
(1) 剪两个全等的三角形，并把它们叠合在一起；

(2) 把其中的一个三角形沿一边翻折，所成的图形是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴；

(3) 再改变其中一个三角形的位置，使这两个三角形成轴对称．

练习

1. 把下列字母看成图形，分别画出它们的对称轴以及两对对称点．



(第 1 题)

2. 画出下列各轴对称图形的对称轴.

① ② ③

(第2题)

3. 把一节藕切成两段，再从一段上切下两个薄片，按下图摆放，哪两个截面成轴对称?

① ②

(第3题)

2.1 习题

1. 下列奥运会会徽是轴对称图形吗? 如果是，画出对称轴.

1976年 蒙特利尔　1980年 莫斯科　2004年 雅典　2008年 北京

(第1题)

2. (1) 正五边形(各边相等且各角也相等的五边形，如图①)有几条对称轴?

   (2) 在图①中画一条对角线得到图②，图②有几条对称轴?

   (3) 如果在图②中再画一条对角线，那么所得图形有几条对称轴?

① ②

(第2题)

3. 请你为学校设计一幅轴对称图形的校运动会会徽.

4. 商标、银行标识、汽车标牌等图案中，有许多是轴对称图形. 请收集这样的图案，并与同学进行交流和评价.

2.2 轴对称的性质

根据“轴对称”的定义，如果两个图形成轴对称，那么这两个图形能够完全重合，即成轴对称的两个图形全等.

我们来看，轴对称还有什么性质？

操作

把一张纸折叠后，用针扎一个孔(如图 2－5(1))；再把纸展开，两针孔分别记为点 A、点 A'，连接 AA'，折痕记为 l，AA' 与 l 相交于点 O(如图 2－5(2))，点 A 与点 A' 关于直线 l 对称.

(1)　　　　(2)

图 2－5

思考

在图 2－5(2)中，线段 AA' 与直线 l 有什么关系？

垂直并且平分一条线段的直线，叫做这条线段的**垂直平分线**(midpoint perpendicular). 如图 2－6，直线 l 交线段 AB 于点 O，$\angle 1=90°$，$AO=BO$，直线 l 是线段 AB 的垂直平分线.

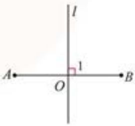


图 2－6

仿照上面的操作，在对折后的纸上再扎一个孔，把纸展开后记这两个针孔为点 B、点 B'，连接 AB、$A'B'$、BB'(如图 2－7(1))，线段 AB 与线段 $A'B'$ 关于直线 l 对称. 线段 BB' 与直线 l 有什么关系？

(1)　　　　　　(2)

图 2－7

再仿照上面的操作，扎孔、展开、标记、连线(如图 2－7(2))，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称．线段 CC' 与直线 l 有什么关系？

于是，我们知道轴对称具有如下基本性质：

成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分．

1. 分别画出下列各图中成轴对称的两个图形的对称轴．

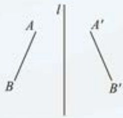
①　　　　　　②

（第 1 题）

2. 如图，线段 AB 与 $A'B'$ 关于直线 l 对称．连接 AA'、BB'，设它们分别与 l 相交于点 P、Q.

   (1) 在所画的图形中，相等的线段有：________________；

   (2) AA' 与 BB' 平行吗？为什么？



（第 2 题）

思考

如图 2－8，点 A、B、C 都在方格纸的格点上．请你再找一个格点 D，使点 A、B、C、D 组成一个轴对称图形．

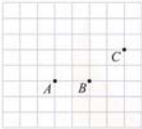
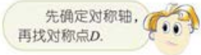
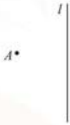


图 2－8



点 A 在直线 l 外，按下列方法画点 A 关于直线 l 的对称点.

画　法	图　形
1. 画 $AO\perp l$，垂足为 O. 2. 在 AO 的延长线上截取 OA'，使 $OA'=AO$. 点 A' 就是点 A 关于直线 l 对称的点．	

操作

(1) 在图 2－9 中，用三角尺画线段 AB 关于直线 l 对称的线段 $A'B'$；

(2) 在图 2－10 中，用三角尺画 $\triangle ABC$ 关于直线 l 对称的 $\triangle A'B'C'$.

图 2－9

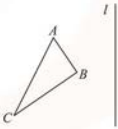


图 2－10

画一个图形关于一条直线对称的图形，关键是确定某些点关于这条直线的对称点．

讨论

在图 2－11 中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 关于直线 l 对称．连接 AC、BD，设它们相交于点 P．怎样找出点 P 关于直线 l 对称的点 Q？

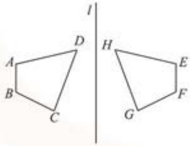
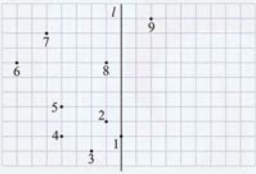


图 2－11

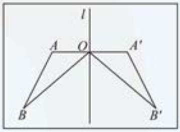
成轴对称的两个图形的任何对应部分也成轴对称．

练习

1. 画出图中编号为 1～9 的 9 个点关于直线 l 对称的点，并相应地编号为 $1'$～$9'$，然后把两组点按各自的序号分别依次连接起来．你得到了一幅什么图案？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，线段 AB 与 $A'B'$ 关于直线 l 对称，AA' 交直线 l 于点 O.

(1) 把线段 AB 沿直线 l 翻折，重合的线段有：__________________________；

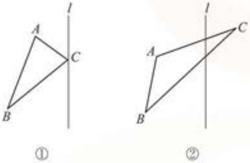
(2) 因为 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OA'B'$ 关于直线 l ________，所以 $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$，直线 l 垂直平分线段________，$\angle ABO = \angle$ ________，$\angle AOB' = \angle$ ________.

2.2 习题

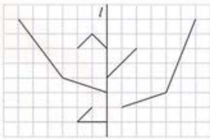
1. 用三角尺分别画出下列图形的对称轴.

(第 1 题)

2. 用三角尺画$\triangle ABC$关于直线 l 对称的三角形.



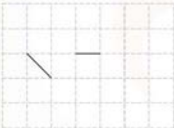
(第 2 题)



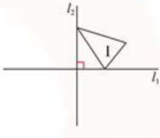
(第 3 题)

3. 把方格纸上的图补成以直线 l 为对称轴的轴对称图形.

4. 在如图的方格纸上画有 2 条线段，再画 1 条线段，使图中的 3 条线段组成一个轴对称图形.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，三角形Ⅰ的 2 个顶点分别在直线 l_1 和 l_2 上，且 $l_1 \perp l_2$.
画三角形Ⅱ，使它与三角形Ⅰ关于直线 l_2 对称；
画三角形Ⅲ，使它与三角形Ⅱ关于直线 l_1 对称；
画三角形Ⅳ，使它与三角形Ⅲ关于直线 l_2 对称.
所画的三角形Ⅳ与三角形Ⅰ成轴对称吗？

2.3　设计轴对称图案

轴对称图形均衡、和谐，给人以美的享受，人们常常利用轴对称设计图案．

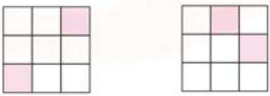
欣赏下列图案：

绿色食品标志　　中国环境标志　　国家免检产品标志

正方形、菱形、三角形等网格纸为轴对称图案的设计提供了方便．例如，在图 2－12 中，利用菱形网格纸，画出了“盆花”的图案．

图 2－12

有些彩色图案，不仅是轴对称图形，而且颜色也“对称”．如果考虑颜色的“对称”，那么图 2－13(1)只有 2 条对称轴，只要将图 2－13(1)中左上方和右下方的小方格也涂成红色，它就有 4 条对称轴；类似地，图 2－13(2)只有 1 条对称轴．改变图 2－13(2)中哪些小方格的颜色，就能使它也有 4 条对称轴？



(1)　　(2)

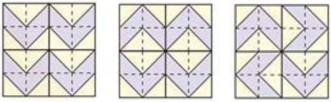
图 2－13

数学实验室

1. (1) 制作 4 张如图 2－14 的正方形纸片.

(2) 将制作好的 4 张纸片拼合，能得到不同的图案. 图 2－15(1)～(3)是轴对称图形吗？如果是，画出它的对称轴.

图 2－14



(1) (2) (3)

图 2－15

(3) 你还能拼出其他图案吗？并指出所得图案有几条对称轴.

2. 人们在剪纸时，常常利用轴对称设计图案. 例如，把一张纸对折、画图（图 2－16(1)）并剪去图中阴影部分，把纸展开（图 2－16(2)），涂色后就得“庆丰灯笼”的剪纸作品(图 2－16 (3)).

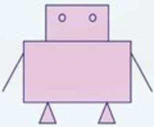
(1) (2) (3)

图 2－16

请你利用轴对称，设计并剪出一幅奖杯图案.

练 习

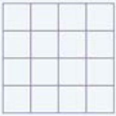
1. 如图，“聪明的机器人”是由 2 条线段、2 个圆、2 个三角形、2 个长方形组成的. 请你用这 8 个图形，自己设计一幅轴对称图案.



(第 1 题)

2. 在方格纸上画一个以简单几何图形组成的天平示意图.

（第 2 题）



（第 3 题）

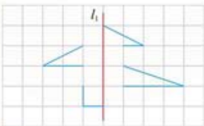
3. 在“4 × 4”网格中，将 8 个小方格分别涂成红、黄、蓝三色，使它成为有 2 条对称轴的彩色图案（颜色也成“对称”）.

2.3 习题

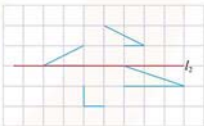
1. 如图，电子琴上琴键的音名均用英文字母标记．小明发现图中#C、D、♭E 3 个连续的琴键组成轴对称图形．通过仔细观察，你能发现有哪几个连续的琴键也组成轴对称图形吗？请把它们写出来．

（第 1 题）

2. 请把图①、图②分别补成以直线 l_1、l_2 为对称轴的轴对称图形，将得到怎样的图案？



①



②

（第 2 题）

2.4 线段、角的轴对称性

如图 2－17，直线 l 是线段 AB 的垂直平分线，l 交 AB 于点 O. 把 OA 沿直线 l 翻折，因为 $\angle 1=\angle 2=90^\circ$，$OA=OB$，所以 OA 与 OB 重合 .

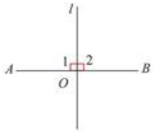


图 2－17

线段是轴对称图形，线段的垂直平分线是它的对称轴 .

思考

如图 2－18，线段 AB 的垂直平分线 l 交 AB 于点 O，点 P 在 l 上 . PA 与 PB 相等吗?

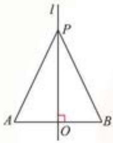


图 2－18

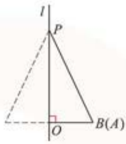


图 2－19

我们可以运用图形运动的方法，利用线段的轴对称性，证明 $PA=PB$.

把$\triangle PAO$沿直线 l 翻折(如图 2－19)，因为 $\angle POA=\angle POB$，所以 OA 落在射线 OB 上. 因为 $OA=OB$，所以点 A 与点 B 重合 . 依据基本事实“两点确定一条直线”，可知 PA 与 PB 重合，所以 $PA=PB$.

于是，我们得到如下定理：

线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等 .

线段的垂直平分线外的点到这条线段两端的距离相等吗？为什么？

讨论

如图 2－20，点 P 在线段 AB 的垂直平分线 l 外，PA 交 l 于点 Q，连接 QB. 因为点 Q 在 AB 的垂直平分线上，所以 $QA=QB$，于是 $PA=PQ+QA=PQ+QB>PB$.

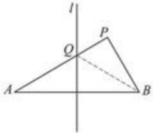
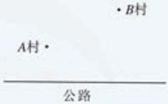


图 2－20

练习

1. 利用网格画线段 PQ 的垂直平分线：

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，要在公路旁设一个公共汽车站，车站应设在什么地方，才能使 A、B 两村到车站的距离相等？

思考

如果一个点在一条线段的垂直平分线上，那么这个点到这条线段两端的距离相等．反过来，如果一个点到一条线段两端的距离相等，那么这个点在这条线段的垂直平分线上吗？

若点 Q 在线段 AB 上，且 $QA=QB$，则 Q 是线段 AB 的中点，点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上(如图 2－21(1)).

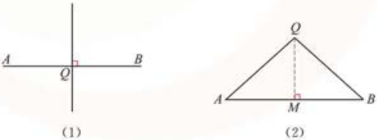


图 2－21

若点 Q 在线段 AB 外，且 $QA=QB$，则作 $QM\perp AB$，垂足为 M（如图 2－21(2)）．由 $\angle QMA=\angle QMB=90^\circ$，$QA=QB$，$QM=QM$，

可证 Rt△QAM≌Rt△QBM(HL)．由此可知 $AM=BM$，即点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上．

于是，我们得到如下定理：

到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上．

线段的垂直平分线是到线段两端距离相等的点的集合．

操作

按下列作法，用直尺和圆规作线段 AB 的垂直平分线：

作　法	图　形
1. 分别以点 A、B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 C、D. 2. 过 C、D 两点作直线． 直线 CD 就是线段 AB 的垂直平分线．	

交流

在△ABC 中，用直尺和圆规分别作 AB、AC 的垂直平分线 l_1、l_2，l_1、l_2 相交于点 O，再作 BC 的垂直平分线．你有什么发现？

例 1 已知：如图 2－22，在△ABC 中，AB、AC 的垂直平分线 l_1、l_2 相交于点 O.

求证：点 O 在 BC 的垂直平分线上．

证明： 连接 OA、OB、OC．

∵ 点 O 在 AB 的垂直平分线 l_1 上，

∴ $OA=OB$（线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等）．

同理 $OA=OC$.

∴ $OB=OC$.

∴ 点 O 在 BC 的垂直平分线上（到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上）．

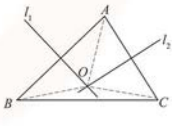
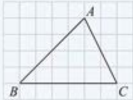


图 2－22

练习

1. 利用网格在图中找一点 O，使 $OA=OB=OC$.
2. 直线 l 外有点 A、B，若要在 l 上找一点，使这点与点 A、B 的距离相等，这样的点一定能找到吗？请你画图表示各种可能的情况.



（第1题）

如图 2－23，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线. 如果把 $\angle 1$ 沿 OC 翻折，因为 $\angle 1=\angle 2$，所以射线 OA 与射线 OB 重合.

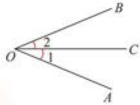


图 2－23

角是轴对称图形，角平分线所在的直线是它的对称轴.

操作

在 $\angle AOB$ 的平分线上任意取一点 P，分别画点 P 到 OA 和 OB 的垂线段 PC 和 PD（如图2－24）. PC 与 PD 相等吗？

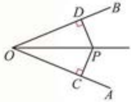


图 2－24

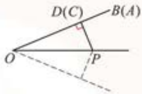


图 2－25

我们可以运用图形运动的方法，利用角的轴对称性，证明 $PC=PD$.

把图 2－24 中的 $\triangle POC$ 沿 OP 翻折（如图 2－25），因为 $\angle AOP=\angle BOP$，所以 OA 与 OB 重合. 因为 $PC\perp OA$，$PD\perp OB$，依据基本事实"过一点有且只有一条直线与已知直线垂直"，可知 PC 与 PD 重合，所以 $PC=PD$.

于是，我们得到如下定理：

角平分线上的点到角两边的距离相等.

讨论

如果一个点在一个角的平分线上，那么这个点到这个角的两边距离相等；反过来，如果一个点到一个角的两边的距离相等，那么这个点在这个角的平分线上吗？

如图 2－26，点 Q 在 $\angle AOB$ 内，且 $QC \perp OA$，$QD \perp OB$，垂足分别为 C、D，$QC=QD$，作射线 OQ. 因为 $\angle QCO=\angle QDO=90°$，$QC=QD$，$OQ=OQ$，所以 $Rt\triangle QCO \cong Rt\triangle QDO$. 于是 $\angle AOQ=\angle BOQ$，即点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

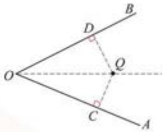


图 2－26

于是，我们得到如下定理：

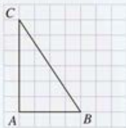
角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

练习

利用网格画图：

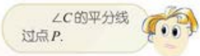
(1) 在 BC 上找一点 P，使点 P 到 AB 和 AC 的距离相等；

(2) 在射线 AP 上找一点 Q，使 $QB=QC$.



交流

在 $\triangle ABC$ 中，用直尺和圆规分别作角平分线 AD、BE，AD、BE 相交于点 P，再作 $\angle C$ 的平分线，你有什么发现？



例 2 已知：如图 2－27，$\triangle ABC$ 的角平分线 AD、BE 相交于点 P. 求证：点 P 在 $\angle C$ 的平分线上.

证明： 过点 P 作 $PF \perp AB$、$PM \perp BC$、$PN \perp AC$，垂足分别为 F、M、N.

∵ AD 平分 $\angle BAC$，点 P 在 AD 上，

∴ $PF = PN$（角平分线上的点到角两边的距离相等）.

同理 $PF = PM$.

∴ $PM = PN$.

∴ 点 P 在 $\angle C$ 的平分线上（角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上）.

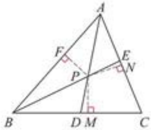


图 2－27

例 3　已知：如图 2－28，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别为 E、F.

求证：AD 垂直平分 EF.

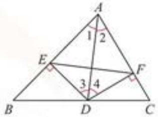


图 2－28

证明： ∵ $DE \perp AB$，$DF \perp AC$，$\angle 1 = \angle 2$，

∴ $\angle 3 = \angle 4$，

∴ $DE = DF$，$AE = AF$（角平分线上的点到角两边的距离相等）.

∴ 点 D、A 在 EF 的垂直平分线上（到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上）.

∴ AD 垂直平分 EF.

思考与表述

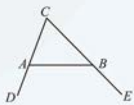
怎么想　　怎么写

要证 AD 垂直平分 EF，
只要证 $DE = DF$，$AE = AF$.
已知 $\angle 1 = \angle 2$，
$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，
只要证 $\angle 3 = \angle 4$.

在一张纸上画 $\triangle ABC$ 及其两个外角（如图）.

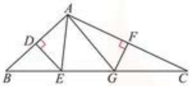
(1) 用折纸的方法分别折出 $\angle BAD$ 和 $\angle ABE$ 的平分线，设两条折痕的交点为 O；

(2) 用直尺和圆规作 $\angle ACB$ 的平分线 CF. 点 O 在射线 CF 上吗？证明你的结论.

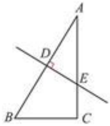


2.4 习题

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$BC=7$，AB的垂直平分线分别交AB、BC于点D、E，AC的垂直平分线分别交AC、BC于点F、G. 求$\triangle AEG$的周长.



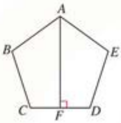
（第1题）



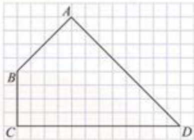
（第2题）

2. 如图，AB的垂直平分线分别交AB、AC于点D、E，$AC=9$，$AE:EC=2:1$. 求点B到点E的距离.

3. 已知：如图，$AB=AE$，$BC=ED$，AF垂直平分CD.
求证：$\angle B=\angle E$.



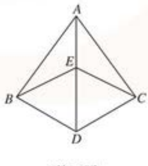
（第3题）



（第4题）

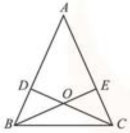
4. (1) 利用网格画四边形$ABCD$任意两边的垂直平分线，设它们相交于点O；
(2) 观察点O是否在另两边的垂直平分线上；
(3) 把四边形$ABCD$的顶点D向左移动8格，还能观察到与上面相同的结论吗？

5. 已知：如图，$AB=AC$，$DB=DC$，点E在AD上.
求证：$EB=EC$.

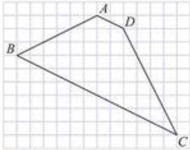


（第5题）

6. 已知：如图，$AB=AC$，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $AD=AE$，BE、CD 相交于点 O．
求证：点 O 在线段 BC 的垂直平分线上．



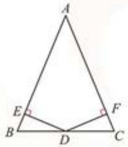
（第 6 题）



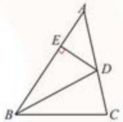
（第 7 题）

7. (1) 利用网格画四边形 $ABCD$ 两个内角的平分线，设它们相交于点 O；
(2) 观察点 O 是否在另两个内角的平分线上；
(3) 把四边形 $ABCD$ 的顶点 D 向右平移 4 格，再向下平移 2 格，还能观察到与上面相同的结论吗？

8. 已知：如图，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 上，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E、F，且 $DE=DF$．
求证：D 是 BC 的中点．



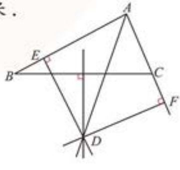
（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，BD 是△ABC 的角平分线，$DE\perp AB$，垂足为 E．△ABC 的面积为 70，$AB=16$，$BC=12$．求 DE 的长．

10. 已知：如图，∠BAC 的平分线与 BC 的垂直平分线相交于点 D，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E、F．
求证：$BE=CF$．

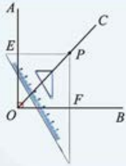


（第 10 题）

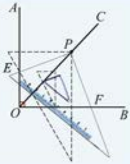
11. 在七年级下册“证明”一章的学习中，我们曾做过如下的实验：

画$\angle AOB=90°$，并画$\angle AOB$的平分线OC.

(1) 把三角尺的直角顶点落在OC的任意一点P上，并使三角尺的两条直角边分别与OA、OB垂直，垂足分别为E、F(图①). 度量PE、PF的长度，这两条线段相等吗？



①



②

(2) 把三角尺绕点P旋转，三角尺的两条直角边分别交OA、OB于点E、F(图②)，PE与PF相等吗？

通过实验可以得到$PE=PF$的结论，现在请你证明这个结论.

读一读

倒过来想

宋朝有个历史学家叫司马光，他不仅因编著《资治通鉴》而流芳百世，而且他在小时候砸缸救人的故事至今仍广为流传.

司马光有一次跟一群小伙伴玩耍，其中一个小孩不小心跌入储满水的大缸里，由于缸太高，同伴们无法救出这个小孩，大家都慌了神. 这时司马光把缸砸破，这样人便得救了.

在“让人离开水”有困难时，司马光设法“让水离开人”，这就是司马光的聪明所在.

倒过来想，就是逆向思考，这是数学中常用的一种思维方式. 比如，本章中对“线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等”进行逆向思考，经过证明就得到了它的逆定理——到线段两端距离相等的点在这条线段的垂直平分线上；又如，对整式乘法法则和公式进行逆向思考，就得到了多项式因式分解的方法；再如，探求证明的途径时，如果不能顺利地从条件出发推出结论，不妨逆向思考，即从结论出发，寻找使结论成立的条件，往往能找到证明的途径.

学会“倒过来想”，有助于不断提高你提出问题和解决问题的能力.

2.5 等腰三角形的轴对称性

把等腰三角形纸片沿顶角平分线折叠，你有什么发现？

如图 2-29(1)，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$．沿 $\angle BAC$ 的平分线 AD 把 $\triangle ABD$ 翻折．因为 $\angle BAD=\angle CAD$，所以 AB 落在射线 AC 上．因为 $AB=AC$，所以点 B 与点 C 重合，从而 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 重合（如图 2-29(2)）．

等腰三角形是轴对称图形，顶角平分线所在直线是它的对称轴．

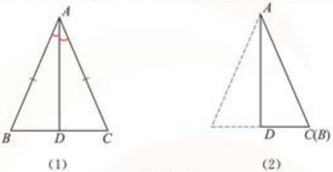


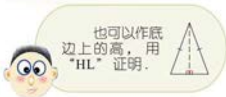
图 2-29

由 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 重合，可知 $\angle B=\angle C$，$\angle ADB=\angle ADC=90°$，$BD=CD$．

于是，我们得到如下定理：

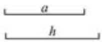
> **等腰三角形的两底角相等（简称"等边对等角"）．**
> **等腰三角形底边上的高线、中线及顶角平分线重合．**

你还可用什么方法证明上述定理？



操作

按下列作法，用直尺和圆规作等腰三角形 ABC，使底边 $BC=a$，高 $AD=h$.

作　法	图　形
1. 作线段 $BC=a$. 2. 作线段 BC 的垂直平分线 MN，MN 交 BC 于点 D. 3. 在 MN 上截取线段 DA，使 $DA=h$. 4. 连接 AB、AC. $\triangle ABC$ 就是所求作的等腰三角形.	

例 1　已知：如图 2－30，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 上，且 $AD=BD$.

求证：$\angle ADB=\angle BAC$.

证明：$\because AB=AC,\ AD=BD$,

$\therefore \angle B=\angle C,\ \angle B=\angle 1$（等边对等角）.

$\therefore \angle C=\angle 1$.

$\because \angle ADB$ 是 $\triangle ADC$ 的外角，

$\therefore \angle ADB=\angle C+\angle 2$.

$\therefore \angle ADB=\angle 1+\angle 2=\angle BAC$.

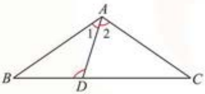


图 2－30

思考与表述

怎么想　　怎么写

要证 $\angle ADB=\angle BAC$，
由于 $\angle BAC=\angle 1+\angle 2$，
$\angle ADB=\angle C+\angle 2$，
只要证 $\angle 1=\angle C$.
只要找与 $\angle 1$ 相等且与 $\angle C$ 也相等的角.

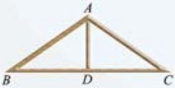
练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 上.
   如果 $\angle BAD=\angle CAD$，那么 $AD\perp BC$，$BD=CD$；
   如果 $BD=CD$，那么 $\angle$______$=\angle$______，______$\perp$______；
   如果 $AD\perp BC$，那么____________，____________.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$.
   (1) 如果 $\angle B=70°$，那么 $\angle C=$______°，$\angle A=$______°；
   (2) 如果 $\angle A=70°$，那么 $\angle B=$______°，$\angle C=$______°；

(3) 如果有一个角等于 120°，那么 $\angle A =$ ______°，$\angle B =$ ______°，$\angle C =$ ______°；

(4) 如果有一个角等于 50°，那么另两个角等于多少度？

3. 在如图的房屋人字梁架中，$AB = AC$，$\angle BAC = 110°$，$AD \perp BC$. 求 $\angle B$、$\angle C$、$\angle BAD$、$\angle CAD$ 的度数．



（第 3 题）

交流

试说出“等腰三角形的两底角相等”这个命题的逆命题，并判断它是真命题还是假命题．

如图 2-31，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$.

作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD.

由 $\angle BAD = \angle CAD$，$\angle B = \angle C$，$AD=AD$，可证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$. 可知 $AB=AC$.

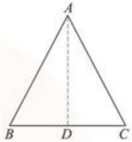


图 2-31

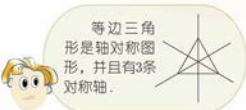
于是，我们得到如下定理：

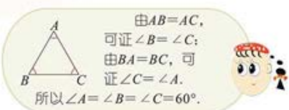
有两个角相等的三角形是等腰三角形（简称“等角对等边”）．

三边相等的三角形叫做**等边三角形**或**正三角形**.

讨论

等边三角形是特殊的等腰三角形，它除了具有等腰三角形的一切性质外，还具有什么特殊的性质？





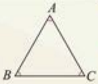
于是，我们得到如下定理：

等边三角形的各角都等于 60°.

思考

1. 如果一个三角形的三个角都相等，那么这个三角形是等边三角形吗？

由$\angle A=\angle B$、$\angle B=\angle C$，可证$AC=BC$、$AB=AC$. 所以$AB=BC=AC$，$\triangle ABC$是等边三角形.



2. 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形吗？为什么？

如果顶角是60°，那么两个底角相等，也都是60°.

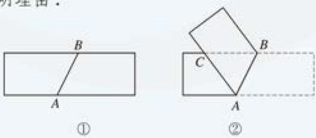
如果一个底角是60°，那么另一个底角也是60°，并且顶角也是60°.

于是，我们得到如下定理：

三个角都相等的三角形是等边三角形.
有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

练习

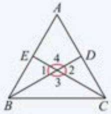
1. 如图①，在一张长方形纸片上任意画一条线段 AB，将纸片沿线段 AB 折叠（如图②）. 重叠部分的 $\triangle ABC$ 是等腰三角形吗？试说明理由.



（第 1 题）

2. 图中的每一个三角形都是等边三角形，试画出这个图形所有的对称轴．

（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，BD、CE 是等边三角形ABC 的中线．求 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 的度数．

例 2　已知：如图 2－32，$\angle EAC$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，AD 平分 $\angle EAC$，$AD \parallel BC$.

求证：$AB=AC$.

证明：$\because$ $AD \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle EAD=\angle B$，

$\angle DAC=\angle C$.

$\because$ $\angle EAD=\angle DAC$，

$\therefore$ $\angle B=\angle C$.

$\therefore$ $AB=AC$（等角对等边）.

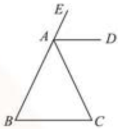


图 2－32

思考与表述

怎么想　　怎么写

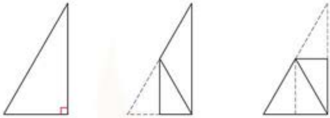
要证 $AB=AC$，
只要证 $\angle B=\angle C$.
已知 $\angle EAD=\angle DAC$，
只要证 $\angle EAD=\angle B$，
$\angle DAC=\angle C$.

思考

在图 2－32 中，如果 $AB=AC$，$AD \parallel BC$，那么 AD 平分 $\angle EAC$ 吗？试证明你的结论．

操作

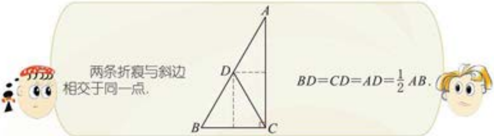
剪一张直角三角形纸片，如图 2 - 33(1).



(1)　　(2)　　(3)

图 2 - 33

把纸片按图 2 - 33(2) 所示的方法折叠，再把纸片展平后按图 2 - 33(3) 所示的方法折叠，你有什么发现？



如图 2 - 34，在 Rt△ABC 中，∠ACB 是直角，∠B 是锐角．在∠ACB 内作∠BCD=∠B，CD 与 AB 相交于点 D，可知 $DB=DC$. 由等角的余角相等，可得∠ACD =∠A，于是 $DA=DC$．从而 $DA=DB=DC$，即 CD 是斜边 AB 上的中线，且 $CD=\frac{1}{2}AB$.

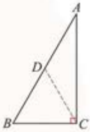


图 2 - 34

于是，我们得到如下定理：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

思考

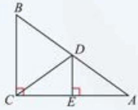
在图 2 - 34 中，如果∠A=30°，那么 BC 与 AB 有怎样的数量关系？试证明你的结论.

练习

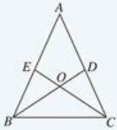
1. 如图，在Rt△ABC中，CD是斜边AB上的中线，$DE\perp AC$，垂足为E.

(1) 如果$CD=2.4$ cm，那么$AB=$________cm；

(2) 写出图中相等的线段和角.



（第1题）



（第2题）

2. 已知：如图，在△ABC中，$AB=AC$，角平分线BD、CE相交于点O.

求证：$OB=OC$.

2.5 习题

1. (1) 已知等腰三角形的周长为10，底边长为4，求它的腰长；

(2) 已知等腰三角形的周长为10，腰长为4，求它的底边长；

(3) 已知等腰三角形的周长为12，一边长为5，求它的另外两边的长.

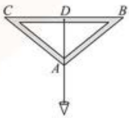
2. 用三角尺画一个等腰三角形的对称轴，你有几种画法？

3. 在等腰三角形ABC中，$\angle A=4\angle B$，根据下列条件分别求$\angle C$的度数：

(1) $\angle A$是顶角；

(2) $\angle A$是底角.

4. 如图，在三角测平架中，$AB=AC$，在BC的中点D处挂一重锤，让它自然下垂. 如果调整架身，使重锤线正好经过点A，那么就能确认BC处于水平位置. 为什么？



（第4题）

5. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=40^\circ$，点D在AB上，根据下列条件分别求$\angle BCD$的度数：

(1) CD是$\triangle ABC$的角平分线；

(2) CD是$\triangle ABC$的高；

(3) $CD=AD$；

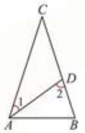
(4) $CD=CB$.

6. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=40^\circ$. 当$\angle B$为多少度时，$\triangle ABC$是等腰三角形？

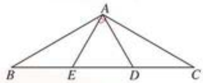
7. 如图，$\angle C=36^\circ$，$\angle B=72^\circ$，$\angle BAD=36^\circ$.

(1) 求$\angle 1$和$\angle 2$的度数；

(2) 找出图中的等腰三角形，并加以证明.



（第 7 题）



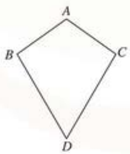
（第 8 题）

8. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120^\circ$，点D、E在BC上，$AD\perp AB$，$AE\perp AC$.

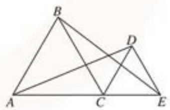
求证：$\triangle AED$是等边三角形.

9. 已知：如图，$AB=AC$，$\angle ABD=\angle ACD$.

求证：$BD=CD$.



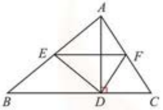
（第 9 题）



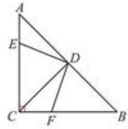
（第 10 题）

10. 如图，$\triangle ABC$和$\triangle CDE$都是等边三角形，且点A、C、E在一条直线上. AD与BE相等吗？证明你的结论.

11. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是高，E、F分别是AB、AC的中点．
(1) $AB = 10, AC = 8$，求四边形$AEDF$的周长；
(2) EF与AD有怎样的位置关系？证明你的结论．



(第 11 题)



(第 12 题)

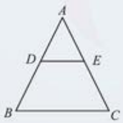
12. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90°$，$AC = BC$，D是AB的中点，点E在AC上，点F在BC上，且$AE = CF$．
求证：$DE = DF$．

阅读

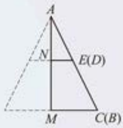
等腰梯形

小学里已经学过：一组对边平行，另一组对边不平行的四边形称为梯形．平行的一组对边称为底，不平行的一组对边称为腰．

如图(1)，在等腰三角形纸片ABC上，画底边BC的平行线DE，可得到一个梯形$DBCE$．由$\angle B = \angle C$，$DE \parallel BC$，可知$\angle ADE = \angle AED$，于是$AD = AE$．又$AB = AC$，从而$DB = EC$．像梯形$DBCE$，两腰相等的梯形称为等腰梯形．



图(1)



图(2)

如果把如图(1)的等腰三角形纸片ABC沿顶角平分线AM折叠，那么AB与AC重合．由于$AD = AE$，可知点D与点E重合（如图(2)），于是$MB=MC$，$ND=NE$．由此，我们可以得到如下结论：

等腰梯形是轴对称图形，过两底中点的直线是它的对称轴．

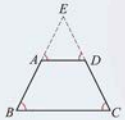
等腰梯形在同一底上的两个角相等．

等腰梯形的对角线相等．

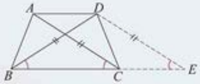
利用等腰梯形与等腰三角形的内在联系，还可以研究：具备什么条件的梯形是等腰梯形？

如图(3)，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle B = \angle C$.

若 BA、CD 的延长线交于点 E，则 $\angle EAD = \angle B = \angle C = \angle EDA$，所以$\triangle EAD$、$\triangle EBC$ 都是等腰三角形，于是 $EB - EA = EC - ED$，即 $AB = DC$，梯形 $ABCD$ 是等腰梯形.



图(3)



图(4)

如图(4)，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AC = BD$.

若过点 D 作 $DE \parallel AC$，交 BC 的延长线于点 E，则可证 $\triangle ADC \cong \triangle ECD$，得 $DE = AC = DB$. 所以 $\angle DBC = \angle E = \angle ACB$. 于是，由 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$，可得 $AB = DC$，梯形 $ABCD$ 是等腰梯形.

由此可知：

在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形.

对角线相等的梯形是等腰梯形.

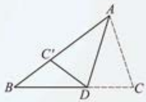
数学活动

折纸与证明

折纸，常常能为证明一个命题提供思路和方法.

例如，在$\triangle ABC$ 中，$AB > AC$(如图 2 - 35(1))，怎样证明$\angle C > \angle B$呢？

(1)



(2)

图 2 - 35

把 AC 沿$\angle A$ 的平分线 AD 翻折，因为 $AB > AC$，所以点 C 落在 AB 上的点 C' 处(如图 2 - 35 (2)).

于是，由$\angle AC'D = \angle C$，$\angle AC'D > \angle B$，可得$\angle C > \angle B$.

请选用下面提供的活动材料，折纸并证明.

1. 用一张正方形纸片折等边三角形.

(1) 如图 2－36，把正方形纸片 $ABCD$ 对折后再展开，折痕为 EF；

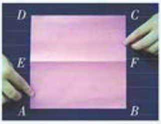


图 2－36

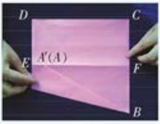


图 2－37

(2) 如图 2－37，将点 A 翻折到 EF 上的 点 A'处，且使折痕过点 B；

(3) 如图 2－38，沿 $A'C$ 折叠，得$\triangle A'BC$(如图 2－39).

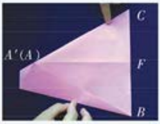


图 2－38

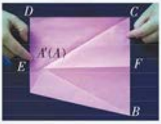


图 2－39

你能证明$\triangle A'BC$ 是等边三角形吗?

2. 用纸条折一个正五边形.

(1) 把纸条打好一个结(如图2-40)，再拉紧压平(如图2-41)；

图 2－40

图 2－41

(2) 沿图 2－42 中的虚线剪开，就得五边形 $ABCDE$(如图2-43).

图 2－42

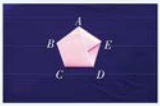


图 2－43

各边相等、各角相等的五边形是正五边形. 你能证明五边形 $ABCDE$ 是正五边形吗?

小结与思考

1. 本章知识结构：

- 轴对称
  - 轴的对称性质
    - 成轴对称的两个图形全等. 成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分
  - 轴对称图形
    - 线段
      - 线段的垂直平分线是它的对称轴
      - 线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等
      - 到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上
    - 角
      - 角平分线所在直线是它的对称轴
      - 角平分线上的点到角两边的距离相等
      - 角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上
    - 等腰三角形
      - 顶角平分线所在直线是它的对称轴
      - 等腰三角形的两底角相等. 等腰三角形底边上的高线、中线及顶角平分线重合
      - 有两个角相等的三角形是等腰三角形
        - 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半
      - 等边三角形
        - 角平分线所在直线是它的对称轴
        - 等边三角形的各角都等于 60°
        - 三个角都相等的三角形是等边三角形. 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形

2. 说说轴对称与轴对称图形的区别和联系 .

3. “等腰三角形的两底角相等”揭示了等腰三角形具有的一个性质，称为等腰三角形的性质定理；“有两个角相等的三角形是等腰三角形”揭示了具备什么条件的三角形是等腰三角形，称为等腰三角形的判定定理 . 这两个定理是互逆定理 .

你能在学过的定理中，再说出一对互逆定理，并指出其中哪一个是性质定理，哪一个是判定定理吗？

4. 在本章学习中，通过图形的翻折，探索并证实了线段的垂直平分线、角平分线、等腰三角形的性质 . 运用图形运动的方法，也可以研究图形的性质 .

5. 本章例题中的“思考与表述”，体现了“由未知想须知”的思路 . 这是我们探索解决问题途径常用的一种思考方法 .

复习题

复习巩固

1. 下列图形是不是轴对称图形？如果是，画出它的对称轴.

①　　②　　③　　④

（第1题）

2. 请查找一些国家的国旗图案，并指出其中哪些是轴对称图形？试分别找出它们的对称轴.

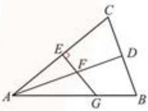
3. (1) 图①是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？如果不是，可以怎样把它补成轴对称图形？

   (2) 图②由5张全等的正方形纸片组成，只移动其中1张纸片，你能使它变成轴对称图形吗？

①　　②

（第3题）

4. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是BC的中点，AC的垂直平分线分别交AC、AD、AB于点E、F、G. 点F到$\triangle ABC$的边________的距离相等，点F到$\triangle ABC$的顶点________的距离相等.



（第4题）

5. (1) 在等腰三角形ABC中，$\angle A=80°$.

   若$\angle A$是顶角，则$\angle B=$________°；

   若$\angle B$是顶角，则$\angle B=$________°；

   若$\angle C$是顶角，则$\angle B=$________°.

(2) 等腰三角形 ABC 的周长为 8 cm，$AB = 3$ cm.

若 AB 是底边，则 $BC =$ ________ cm；

若__________，则 $BC =$ ________ cm；

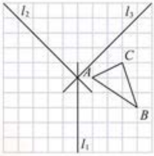
若__________，则 $BC =$ ________ cm.

6. 在如图的网格中：

(1) 画$\triangle A_1B_1C_1$，使它与$\triangle ABC$ 关于 l_1 对称；

(2) 画$\triangle A_2B_2C_2$，使它与$\triangle A_1B_1C_1$ 关于 l_2 对称；

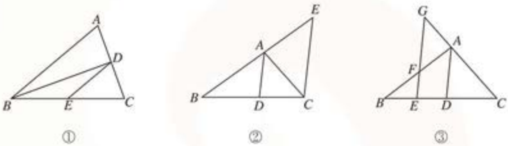
(3) 画$\triangle A_3B_3C_3$，使它与$\triangle A_2B_2C_2$ 关于 l_3 对称；



(第 6 题)

(4) 画出$\triangle A_3B_3C_3$ 与$\triangle ABC$ 的对称轴．

7. 根据下列已知条件，分别指出各个图形中的等腰三角形，并加以证明．



(第 7 题)

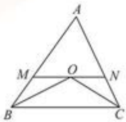
(1) 如图①，BD 平分$\angle ABC$，点 E 在 BC 上，且 $DE \parallel AB$；

(2) 如图②，AD 平分$\angle BAC$，点 E 在 BA 的延长线上，且 $EC \parallel AD$；

(3) 如图③，AD 平分$\angle BAC$，点 E 在 BD 上，点 G 在 CA 的延长线上，且 $GE \parallel AD$，GE 交 AB 于点 F.

8. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线相交于点 O，MN 过点 O，且 $MN \parallel BC$，分别交 AB、AC 于点 M、N.

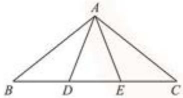
求证：$MN = BM + CN$.



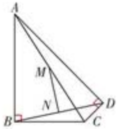
(第 8 题)

灵活运用

9. 如图，点 D、E 在 BC 上，且 $AB=AC$，$AD=AE$. 图中还有哪些相等的线段？试用不同的方法证明你的结论．



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 已知：如图，$\angle ABC=\angle ADC=90^{\circ}$，$M$、$N$ 分别是 AC、BD 的中点．

求证：$MN\perp BD$.

11. (1) 野营活动中，小明用一块等腰三角形的铁皮代替锅，烙一块与铁皮形状、大小相同的饼．烙好一面后把饼翻身，这块饼仍能正好落在“锅”中．这是为什么？

(2) 小丽用如图①的直角三角形铁皮，烙一块与铁皮形状、大小相同的饼．如果烙好一面后就把饼翻身，那么这块饼不能正好落在“锅”中．小丽将饼切了一刀，然后将两小块都翻身，结果饼就能正好落在“锅”中．小丽怎样切的？为什么？

①

②

（第 11 题）

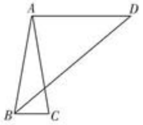
(3) 如果用来烙饼的铁皮既不是等腰三角形也不是直角三角形（如图②），那么烙好一面后，怎样将烙饼翻身，才能使烙饼仍能正好落在“锅”中？

12. 在一个三角形中，如果一条边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形吗？证明你的结论．

13. 如图，$AB=AC=AD$.

(1) 如果 $AD \parallel BC$，那么$\angle C$和$\angle D$有怎样的数量关系？证明你的结论；

(2) 如果 $\angle C=2\angle D$，那么你能得到什么结论？证明你的结论．

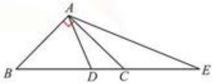


（第 13 题）

探索研究

14. (1) 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点D在BC上，且$BD=BA$，点E在BC的延长线上，且$CE=CA$，求$\angle DAE$的度数；

(2) 如果把第(1)题中“$AB=AC$”的条件舍去，其余条件不变，那么$\angle DAE$的度数会改变吗？



（第 14 题）

(3) 如果把第(1)题中“$\angle BAC=90^\circ$”的条件改为“$\angle BAC>90^\circ$”，其余条件不变，那么$\angle DAE$与$\angle BAC$有怎样的数量关系？

15. 我们知道：如果点P在线段AB的垂直平分线l上，那么$PA=PB$；如果$PA=PB$，那么点P在线段AB的垂直平分线l上；如果点P不在线段AB的垂直平分线l上，那么$PA\neq PB$. 试证明：如果$PA\neq PB$，那么点P不在线段AB的垂直平分线l上．

16. 已知直线l、点A和点B．试在直线l上确定一点P，使$PA+PB$最小．

后 记

本套教材是以《义务教育 数学课程标准(2011 年版)》为依据，在广泛听取专家、实验区师生的意见和建议的基础上，对《义务教育课程标准实验教科书 数学(苏科版)》(以下简称“实验本”)进行修订而成的，供义务教育 7～9 年级使用.

本套教材每章的开头部分设置：

章头图，章头语，章头问题，本章内容概述.

每章的内容部分设置：

“数学实验室”——通过“做”数学，感悟、理解数学知识；

“数学活动” 运用本章知识解决一些简单的问题；

“阅读”和“读一读” 介绍数学思想方法、拓展课本内容；

“练一练”——按课时编写，供当堂练习用；

“习题”——按节编写，供本节各个课时课后作业用.

每章的末尾部分设置：

“小结与思考”——梳理本章知识的结构、提炼基本思想；

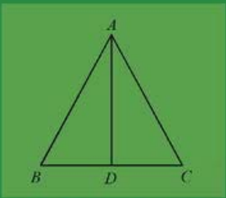
“复习题”(分为复习巩固、灵活应用、探索研究三个层次)——供本章复习时用，其中“灵活应用”、“探索研究”部分的习题可根据实际情况选用.

本套教材的每册课本设置一个“课题学习”——综合运用有关知识解决实际问题. 全书使用了卡通人“小明”、“小丽”，并根据课程内容展开的需要，编写了一些卡通语.

“实验本”教材由杨裕前、董林伟任主编，丁伟明、李善良曾任副主编. 参与本册(“实验本”)各章编写的有董大成、杨秋萍、徐延党.

修订后的本套教材由杨裕前、董林伟任主编. 参与修订的编写人员有周凯、杨秋萍、徐延党、朱建明；参与修订讨论的有王永建、周学祁、陈志廉、荆福仁.

史宁中教授、顾泠沅教授、张英伯教授等专家、同行，对本套教材的修订给予了热情的帮助和指导，提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心感谢!



数学

SHU XUE

八年级 上册