教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

SHU XUE

九年级 上册

江苏凤凰科学技术出版社

义务教育教科书

数学

SHU XUE

九年级 上册

杨裕前　董林伟　主编

江苏凤凰科学技术出版社
南　京

致同学

亲爱的伙伴：

祝贺你升入九年级！

两年来我们在数学王国里探索，翻过了一座座“山峰”，当你蓦然回首时，会发现自己“长高”了．这册课本将陪伴你继续攀登，进一步领略数学王国里的多姿多彩．

“一元二次方程”是又一个刻画现实世界数量关系的数学模型，你将在学习一元二次方程各种解法的过程中，进一步体会转化的思想，并尝试应用一元二次方程的知识解决一些实际问题．

红日、车轮、硬币……圆象征着完美、和谐，“对称图形——圆”将引导你运用圆的对称性探索圆的一些性质，运用图形运动和推理的方法证实圆的有关性质．

“数据的集中趋势和离散程度”将介绍平均数、中位数、众数和方差，并引导你根据具体问题，选用这些统计量来描述、分析数据．

袋子中装有红球、白球、黑球各1个，这些球除颜色外都相同．搅匀后从中摸出1个球，摸到红球、白球、黑球的可能性相同吗？学习了“等可能条件下的概率”以后，你将会计算这样的一类事件发生的概率．

“实践与探索”、“观察与思考”、“操作与思考”、“尝试与交流”、“思考与探索”、“拓展与延伸”等，本册课本设计的这些栏目，不仅有助于你学懂知识、学会技能，而且能引导你体会数学的本质，感悟基本数学思想．

目　录

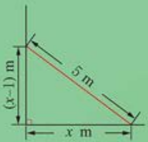
第 1 章　一元二次方程

第 2 章　对称图形——圆

第 3 章 数据的集中趋势和离散程度

第 4 章 等可能条件下的概率

第1章　一元二次方程



$$x^2+(x-1)^2=5^2$$

从“一次”到“二次”，建立了新的数学模型；
从“二次”到“一次”，用转化思想解决问题．

一块石头从离海面 45 m 高的绝壁上落下，试估计这块石头经过多少时间落到海面．

设石头在下落过程中离海面的高度 h 与下落的时间 t 有如下的关系：

$$h=-5t^2+45.$$

1. 填表：

t/s	0	0.5	1	1.5	2	2.5	…
h/m							…

2. 石头经过多少时间落到海面？

本章将学习一元二次方程的概念、解法和应用．

1.1　一元二次方程

正方形桌面的面积是 2 m^2．设正方形桌面的边长是 x m，可以用方程

$$x^2=2$$

来描述该桌面的边长与面积之间的数量关系．

如图 1－1，矩形花圃一面靠墙，另外三面所围的栅栏的总长度是 19 m，花圃的面积是 24 m^2．设花圃的宽是 x m，则花圃的长是 $(19-2x)$ m，可以用方程

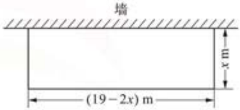


图 1－1

$$x(19-2x)=24$$

来描述该花圃的宽与面积之间的数量关系．

某校图书馆的藏书在两年内从 5 万册增加到 9.8 万册．设图书馆的藏书平均每年增长的百分率是 x，则图书馆的藏书一年后为 $5(1+x)$ 万册，两年后为 $[5(1+x)](1+x)$ 万册，可以用方程

$$5(1+x)^2=9.8$$

来描述该图书馆藏书年平均增长的百分率与藏书量之间的数量关系．

如图 1－2，长 5 m 的梯子斜靠在墙上，梯子的底端到墙面的距离比梯子的顶端到地面的距离多 1 m．设梯子的底端到墙面的距离是 x m，怎样用方程来描述其中的数量关系？

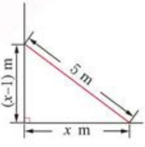


图 1－2

尝试交流

方程 $x^2=2$、$x(19-2x)=24$、$5(1+x)^2=9.8$、$x^2+(x-1)^2=25$ 有哪些共同的特征?

方程 $x^2=2$、$x(19-2x)=24$、$5(1+x)^2=9.8$、$x^2+(x-1)^2=25$，它们都只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2．像这样的方程叫做**一元二次方程**(quadratic equation with one unknown)．

关于 x 的一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 是常数，$a\neq0$）．其中，ax^2、bx、c 分别叫做二次项、一次项和常数项，a、b 分别叫做二次项系数、一次项系数．

> 如果 $a=0$，那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 就不是一元二次方程了．

例如，方程 $x(19-2x)=24$ 可以整理成 $-2x^2+19x-24=0$，它的二次项系数、一次项系数和常数项分别为 -2、19、-24．

练习

1. 用方程描述下列问题中的数量关系：

   (1) 一张面积是 240 cm^2 的长方形彩纸，长比宽多 8 cm．设它的宽为 x cm，可得方程________________．

   (2) 一枚圆形古钱币的中间是一个边长为 1 cm的正方形孔．已知正方形面积是圆面积的 $\frac{1}{9}$．设圆的半径为 x cm，可得方程________________．

(第 1 题)

2. 把下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项．

   (1) $x^2-x=2$；　　(2) $4x+1=x^2$；

   (3) $2x^2=-3x+1$；　　(4) $x(x+3)=-2$．

1.1 习题

1. 用方程描述下列问题中的数量关系：

(1) 一个正方体的表面积是 150 cm^2. 设这个正方体的棱长为 x cm，可得方程________________.

(2) 一个长方形操场的面积是 7 200 m^2，长是宽的 2 倍. 设这个操场的宽为 x m，可得方程________________.

(3) 两个连续奇数的积为 323，设其中的一个奇数为 x，可得方程________________.

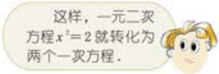
(4) 某工厂经过两年时间将某种产品的产量从每年 14 400 台提高到 16 900 台. 设平均每年增长的百分率为 x，可得方程________________.

2. 你能找到第 1(1)题所列方程的解吗？试一试.

1.2 一元二次方程的解法

我们已经会解一元一次方程，如何解一元二次方程？

对于一元二次方程 $x^2=2$，根据平方根的意义，x 是 2 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{2}$．



于是，我们知道一元二次方程 $x^2=2$ 有两个根，它们分别记为

$$x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2}.$$

这种直接通过求平方根来解一元二次方程的方法叫做**直接开平方法**．

例 1 解下列方程：

(1) $x^2-4=0$；　　(2) $4x^2-1=0$．

解：(1) 移项，得

$$x^2=4.$$

因为 x 是 4 的平方根，

所以

$$x=\pm 2,$$

即

$$x_1=2,\ x_2=-2.$$

(2) 移项，得

$$4x^2=1.$$

两边都除以 4，得

$$x^2=\frac{1}{4}.$$

因为 x 是$\frac{1}{4}$的平方根，

所以

$$x=\pm\frac{1}{2},$$

即

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

例2　解方程：$(x+1)^2=2$.

分析：只要把$(x+1)$看成是一个整体，就可以用直接开平方法求解.

解：因为$(x+1)$是2的平方根，

所以

$$x+1=\pm\sqrt{2},$$

即

$$x_1=-1+\sqrt{2},\ x_2=-1-\sqrt{2}.$$

形如$(x+h)^2=k$（h、k为常数，$k\geqslant 0$）的一元二次方程，可以用直接开平方法求解.

方程$(x+1)^2=0$，$(x+1)^2=-1$有解吗？如果有，你能求出它们的解吗？

1. 解下列方程：

(1) $x^2=16$；　(2) $x^2-0.81=0$；

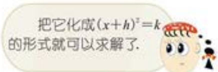
(3) $y^2-144=0$；　(4) $9x^2=4$.

2. 解下列方程：

(1) $(x-1)^2=4$；　(2) $(x+2)^2=3$；

(3) $(x-4)^2-25=0$；　(4) $(2x+3)^2-5=0$.

如何解方程$x^2+6x+4=0$？

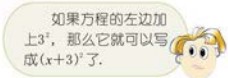


把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+6x=-4,$$

即

$$x^2+2\cdot x\cdot 3=-4.$$



在方程的两边都加上一次项系数6的一半的平方，即3^2后，得

$$x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=-4+3^2.$$

整理，得

$$(x+3)^2=5.$$

解这个方程，得

$$x+3=\pm\sqrt{5}.$$

所以

$$x_1=-3+\sqrt{5},\ x_2=-3-\sqrt{5}.$$

把一个一元二次方程变形为 $(x+h)^2=k$（h、k 为常数）的形式，当 $k\geqslant 0$ 时，就可以用直接开平方法求出方程的解．这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**．

例 3 解下列方程：

(1) $x^2-4x+3=0$； (2) $x^2+3x-1=0$．

解：(1) 移项，得

$$x^2-4x=-3.$$

配方，得

$$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2=-3+2^2,$$

$$(x-2)^2=1.$$

解这个方程，得

$$x-2=\pm 1.$$

所以

$$x_1=3,\ x_2=1.$$

(2) 移项，得

$$x^2+3x=1.$$

配方，得

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}.$$

解这个方程，得

$$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

所以

$$x_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2},\ x_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

数学实验室

用配方法解一元二次方程 $x^2+2x-24=0$，配方的过程可以用拼图（如图 1－3）直观地表示．

把方程 $x^2+2x-24=0$ 变形为 $x^2+2x=24$，即 $x(x+2)=24$．

配方的过程，可以看成将一个长是 $(x+2)$、宽是 x、面积是 24 的矩形割补成一个正方形．

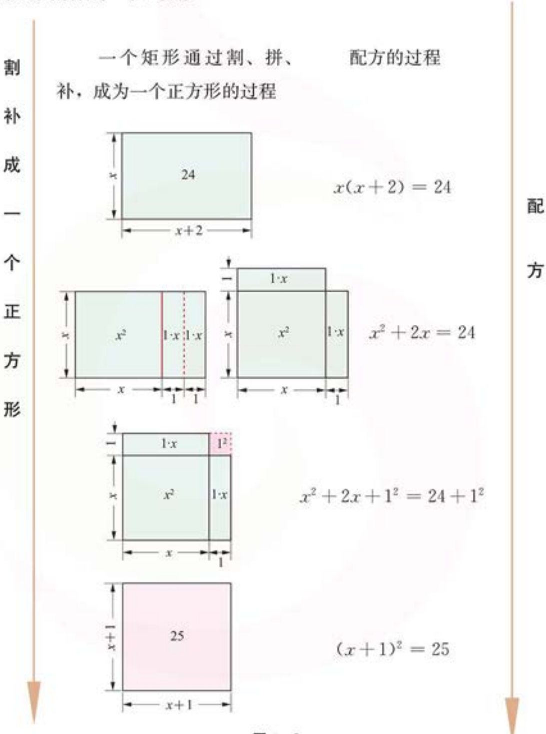


图 1－3

为什么在配方过程中，方程的两边要加上一次项系数一半的平方？

练习

1. 填空：

(1) $x^2-2x+\underline{\quad}=(x-\underline{\quad})^2$；

(2) $x^2+8x+\underline{\quad}=(x+\underline{\quad})^2$；

(3) $x^2-5x+\underline{\quad}=(x-\underline{\quad})^2$；

(4) $x^2+\frac{3}{2}x+\underline{\quad}=(x+\underline{\quad})^2$.

2. 解下列方程：

(1) $x^2+2x=3$；　　(2) $x^2-6x=4$；

(3) $x^2+10x+20=0$；　　(4) $x^2-x-1=0$.

思考与探索

当一元二次方程的二次项系数不是1时，怎样用配方法求解？

把二次项系数化为1.

例4 解方程：$2x^2-5x+2=0$.

解： 两边都除以2，得

$$x^2-\frac{5}{2}x+1=0.$$

移项，得

$$x^2-\frac{5}{2}x=-1.$$

配方，得

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=-1+\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

解这个方程，得

$$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4}.$$

所以

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2.$$

例 5　解方程：$-3x^2+4x+1=0$.

解： 两边都除以 -3，得

$$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}=0.$$

移项，得

$$x^2-\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}.$$

配方，得

$$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}.$$

解这个方程，得

$$x-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

所以

$$x_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3},\ x_2=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

尝试与交流

方程 $2x^2+2x+\frac{1}{2}=0$，$2x^2-x+1=0$ 有解吗？如果有，你能求出它们的解吗？

练习

解下列方程：

(1) $2x^2-8x+1=0$；　　(2) $\frac{1}{2}x^2+2x-1=0$；

(3) $2x^2+3x=0$；　　(4) $3x^2-1=6x$；

(5) $-x^2-x+\frac{1}{2}=0$；　　(6) $-5x^2+2x+1=0$.

思考与探索

如何解一般形式的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)?$$

可以仿照例4、例5的方法.

因为 $a \neq 0$，所以方程两边都除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

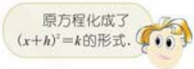
移项，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$



因为 $a \neq 0$，所以 $4a^2>0$.

当 $b^2-4ac \geqslant 0$ 时，

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

所以

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

一般地，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根是由方程的各项系数 a、b、c 确定的，当 $b^2-4ac \geqslant 0$ 时，它的实数根是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这叫做一元二次方程的求根公式．解一元二次方程时，把各项系数的值直接代入这个公式，若 $b^2-4ac \geqslant 0$，就可以求得方程的根．这种解一元二次方程的方法叫做**公式法**．

尝试与交流

在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，如果 $b^2-4ac<0$，那么方程有实数根吗？为什么？

例6　解下列方程：

(1) $x^2+3x+2=0$；　　(2) $2(x^2-2)=7x$.

解：(1) $\because a=1,\ b=3,\ c=2,$

$b^2-4ac=3^2-4\times1\times2=1>0,$

$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm1}{2}.$

$\therefore x_1=-1,\ x_2=-2.$

(2) 把方程 $2(x^2-2)=7x$ 化成一般形式，得

$$2x^2-7x-4=0.$$

$\because a=2,\ b=-7,\ c=-4,$

$b^2-4ac=(-7)^2-4\times2\times(-4)=81>0,$

$\therefore x=\dfrac{7\pm\sqrt{81}}{2\times2}=\dfrac{7\pm9}{4}.$

$\therefore x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=4.$

练习

用公式法解下列方程：

(1) $x^2-3x-4=0$；　　(2) $2x^2+x-1=0$；

(3) $x^2-2x=3$；　　(4) $20x^2=8x+1$；

(5) $x(x-6)=6$；　　(6) $4x(x-1)=1$.

例7　解下列方程：

(1) $x^2+x-1=0$；　　(2) $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$；

(3) $2x^2-2x+1=0$.

解：(1) $\because a=1,\ b=1,\ c=-1,$

$b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-1)=5,$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2\times1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

$\therefore x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}.$

(2) $\because a=1,\ b=-2\sqrt{3},\ c=3,$

$b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=0,$

$$\therefore x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

$\therefore x_1=x_2=\sqrt{3}$.

(3) $\because a=2, b=-2, c=1$,

$b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times1=-4<0$,

$\therefore$ 这个方程没有实数根.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的情况如下：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$).
当 $b^2-4ac>0$ 时，有两个不相等的实数根；
当 $b^2-4ac=0$ 时，有两个相等的实数根；
当 $b^2-4ac<0$ 时，没有实数根.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式.

练习

1. 不解方程，判别方程根的情况：

(1) $x^2+3x-1=0$；　　(2) $x^2-6x+5=0$；

(3) $2y^2-3y+4=0$；　　(4) $x^2+5=2\sqrt{5}x$.

2. k 取什么值时，关于 x 的一元二次方程 $x^2-kx+4=0$ 有两个相等的实数根？求此时方程的根.

尝试交流

如何解方程 $x^2-x=0$？

将方程的左边分解因式，得

$$x(x-1)=0.$$

此时 x 和 $x-1$ 两个因式中至少有一个为 0，即

$$x=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

所以

$$x_1=0,\ x_2=1.$$

当一个一元二次方程的一边是 0，另一边能分解为两个一次因式的乘积时，就可以把解这样的一元二次方程转化为解两个一元一次方程，这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

例 8 解下列方程：

(1) $x^2=-4x$；　　(2) $x+3-x(x+3)=0$.

解：(1) 原方程可变形为

$$x^2+4x=0,$$
$$x(x+4)=0.$$
$$x=0 \text{ 或 } x+4=0.$$

所以

$$x_1=0,\ x_2=-4.$$

(2) 原方程可变形为

$$(x+3)(1-x)=0.$$
$$x+3=0 \text{ 或 } 1-x=0.$$

所以

$$x_1=-3,\ x_2=1.$$

例 9 解方程：$(2x-1)^2-x^2=0$.

解：原方程可变形为

$$(2x-1+x)(2x-1-x)=0,$$

即

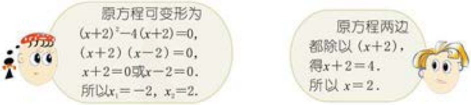
$$(3x-1)(x-1)=0.$$
$$3x-1=0 \text{ 或 } x-1=0.$$

所以

$$x_1=\frac{1}{3},\ x_2=1.$$

观察与思考

解方程$(x+2)^2=4(x+2)$．小丽、小明的解法如下：



小丽、小明的解法，哪个正确？

练习

1. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2-3x=0$；

(2) $3x^2=x$；

(3) $2(x-1)+x(x-1)=0$；

(4) $4x(2x-1)=3(2x-1)$.

2. 用因式分解法解下列方程：

(1) $(x+1)^2-9=0$；

(2) $(x-2)^2-9(x+1)^2=0$；

(3) $(x-1)^2-2(x-1)+1=0$.

1.2 习题

1. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $x^2-36=0$；　　(2) $3x^2-\frac{1}{3}=0$；

(3) $(x+4)^2-2=0$；　　(4) $(2x+1)^2-3=0$；

(5) $2(x-1)^2-5=0$；　　(6) $\frac{1}{3}(x+1)^2-1=0$.

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2-7x+12=0$；　　(2) $x^2+6x-16=0$；

(3) $x^2-4x=2$；　　(4) $x^2+5x+5=0$；

(5) $x^2-0.2x-0.03=0$；　　(6) $x^2+\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}=0$.

3. 用配方法解下列方程：

(1) $4x^2-20x+21=0$；　(2) $2x^2-x-1=0$；

(3) $2y^2-y-\frac{1}{2}=0$；　(4) $\frac{1}{2}t^2+3t=1$；

(5) $-3(x^2+5)=18x$；　(6) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x-1=0$.

4. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+4x-5=0$；　(2) $3x^2-x-2=0$；

(3) $2x^2-5x+1=0$；　(4) $4x(x-2)=1$；

(5) $-2x^2+2\sqrt{2}x+1=0$；　(6) $2(x-2)^2=7x-5$.

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2+6x=0$；　(2) $3x(x-2)=x-2$；

(3) $(x-1)^2-4=0$；　(4) $9t^2-(t-1)^2=0$；

(5) $25x^2-5x+\frac{1}{4}=0$；　(6) $(x+1)^2+8(x+1)+16=0$.

6. 解下列方程：

(1) $x^2-5x-6=0$；　(2) $x^2+12x+27=0$；

(3) $x(x-3)=10$；　(4) $(2x-1)(x+3)=4$.

7. 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $x^2-4x-5=0$；　(2) $3x^2-x+1=0$；

(3) $5x^2+4x-1=0$；　(4) $2x(2-x)=3$.

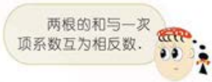
8. 已知 $y_1=x^2-2x+3$，$y_2=3x-1$，x 取什么值时，y_1 与 y_2 相等？

9. k 取什么值时，关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+k-1=0$ 有两个相等的实数根？有两个不相等的实数根？

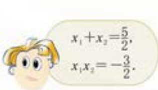
*1.3 一元二次方程的根与系数的关系

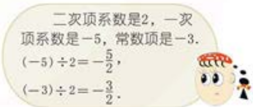
1. 观察下表，你能发现下列一元二次方程的根与系数有什么关系？

$ax^2+bx+c=0$	x_1	x_2
$x^2-3x+2=0$	1	2
$x^2+3x+2=0$	-1	-2
$x^2-5x+6=0$	2	3
$x^2+5x+6=0$	-2	-3
$x^2-3x=0$	0	3



2. 方程 $2x^2-5x-3=0$ 的两根是 $x_1=3, x_2=-\frac{1}{2}$，这两根的和、两根的积与系数有什么关系？





3. 先求出方程 $3x^2-7x+4=0$ 的解，再验证这个方程的根与系数是否有小明、小丽发现的关系 .

一般地，在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，如果 $b^2-4ac\geqslant 0$，那么它的两个根分别是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}、x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

于是可得

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

一元二次方程的根与系数有如下关系：

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根是 x_1、x_2，

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

例 求下列方程两根的和与两根的积：

(1) $x^2+2x-5=0$；　　　　(2) $2x^2+x=1$.

解：(1) 设方程 $x^2+2x-5=0$ 的两根分别是 x_1、x_2.

因为 $a=1$，$b=2$，$c=-5$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-2$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-5$.

(2) 把方程 $2x^2+x=1$ 化成一般形式，得 $2x^2+x-1=0$.

设它的两根分别是 x_1、x_2.

因为 $a=2$，$b=1$，$c=-1$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{1}{2}$.

尝试与交流

小明在一本课外读物中读到如下一段文字：

一元二次方程 x^2- ■ x ■ $=0$ 的两根是 $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$.

你能写出这个方程中被墨迹污染的一次项系数和常数项吗？

练习

*1. 求下列方程两根的和与两根的积：

(1) $x^2-4x+1=0$；　　(2) $2x^2-3x=2$；

(3) $3x^2+2x=0$；　　(4) $4x^2=1$.

*2. 下列结论是否正确？

(1) 设 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2+5x+6=0$ 的两个根，则 $x_1+x_2=5$；

(2) 设 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2-3x=1$ 的两个根，则 $x_1\cdot x_2=1$.

1.3 习题

*1. 求下列方程两根的和与两根的积：

(1) $x^2+6x-6=0$；　　(2) $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$；

(3) $x^2+x=1$；　　(4) $5x^2=6x$.

*2. 已知关于 x 的方程 $2x^2+mx+50=0$ 的一个根是 10，求它的另一个根和 m 的值.

*3. 已知关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根分别是$\sqrt{2}+1$、$\sqrt{2}-1$，求 b、c 的值.

1.4 用一元二次方程解决问题

我们已经知道，生产、生活中的一些实际问题，有时可以用一元二次方程来描述其中数量之间的相等关系，运用一元二次方程的有关知识，常常可以使这些实际问题得到解决．

问题1　用一根长22 cm的铁丝：

(1) 能否围成面积是30 cm^2的矩形？

(2) 能否围成面积是32 cm^2的矩形？

解： 设这根铁丝围成的矩形的长是x cm，则矩形的宽是$(11-x)$ cm．

(1) 根据题意，得

$$x(11-x)=30,$$

即

$$x^2-11x+30=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=5, x_2=6.$$

当$x_1=5$时，$11-x_1=6$；

当$x_2=6$时，$11-x_2=5$．

答： 用一根长22 cm的铁丝能围成面积是30 cm^2的矩形．

(2) 根据题意，得

$$x(11-x)=32,$$

即

$$x^2-11x+32=0.$$

因为$b^2-4ac=(-11)^2-4\times1\times32=121-128=-7<0$，所以此方程没有实数根．

答： 用一根长22 cm的铁丝不能围成面积是32 cm^2的矩形．

问题 2 某商店 6 月份的利润是 2 500 元，要使 8 月份的利润达到 3 600 元，平均每月利润增长的百分率是多少？

分析： 设平均每月利润增长的百分率是 x，则 7 月份的利润是 2 500(1＋x) 元，8 月份的利润是[2 500(1＋x)](1＋x) 元.

解： 设平均每月利润增长的百分率是 x.

根据题意，得

$$2\,500(1+x)^2=3\,600.$$

解这个方程，得

$$x_1=0.2, x_2=-2.2\text{（不合题意，舍去）}.$$

答： 平均每月利润增长的百分率是 20%.

1. 一块长方形菜地的面积是 150 m^2. 如果它的长减少 5 m，那么它就成为正方形菜地. 求这个长方形菜地的长和宽.
2. 用一根长 100 cm 的金属丝能否制成面积是 600 cm^2 的矩形框子？能否制成面积是 800 cm^2 的矩形框子？
3. 某种服装原价每件 80 元，经两次降价，现售价每件51.2 元. 求该种服装平均每次降价的百分率.

问题 3 某商场销售一批衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元. 为了扩大销售，增加盈利，商场采取了降价措施. 假设在一定范围内，衬衫的单价每降 1 元，商场平均每天可多售出 2 件. 如果降价后商场销售这批衬衫每天盈利 1 250 元，那么衬衫的单价降了多少元？

分析： 设衬衫的单价降了 x 元，则商场平均每天可多售出 $2x$ 件衬衫，每件衬衫盈利$(40-x)$元.

解： 设衬衫的单价降了 x 元.

根据题意，得

$$(20+2x)(40-x)=1\,250,$$

即

$$x^2-30x+225=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=x_2=15.$$

答： 衬衫的单价降了 15 元．

问题 4

根据龙湾风景区的旅游信息，某公司组织一批员工到该风景区旅游，支付给旅行社 28 000 元．你能确定参加这次旅游的人数吗？

分析： 由 $800\times30=24\,000<28\,000$，可知参加这次旅游的人数($x$)大于 30，人均收费降低 $10(x-30)$元，于是可列出方程求解．但考虑到人均收费应不低于 550 元，因而必须检验求得的解是否符合题意．

解： 设参加这次旅游共有 x 人，由 $800\times30=24\,000<28\,000$，可知 $x>30$，人均收费为 $[800-10(x-30)]$ 元．

根据题意，得

$$x\cdot[800-10(x-30)]=28\,000.$$

整理，得

$$x^2-110x+2\,800=0.$$

解这个方程，得

$$x_1=40, x_2=70.$$

当 $x=40$ 时，$800-10(x-30)=800-10(40-30)=700>550$.

当 $x=70$ 时，$800-10(x-30)=800-10(70-30)$

$=400<550$（不合题意，舍去）.

答：参加这次旅游共有 40 人.

练习

1. 在本节问题 4 中，该公司又组织第二批员工到龙湾风景区旅游，并支付给旅行社 29 250 元．求该公司第二批参加旅游的员工人数．

2. 某商店经销的某种商品，每件成本为 40 元．经市场调研，售价为 50 元时，可销售 200 件；售价每增加 1 元，销售量将减少 10 件．如果这种商品全部销售完，那么该商店可盈利 2 000 元．问：该商店销售了这种商品多少件？每件售价多少元？

问题 5 如图 1－4，海关缉私人员驾艇在 C 处发现正北方向 30 km 的 A 处有一艘可疑船只，并测得它正以 60 km/h 的速度向正东方向航行，缉私艇随即以 75 km/h 的速度在 B 处将可疑船只拦截．缉私艇从 C 处到 B 处需航行多长时间？

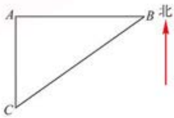


图 1－4

分析： 设缉私艇从 C 处到 B 处需航行 x h，则 $AB=60x$ km，$BC=75x$ km．根据题意，可知$\triangle ABC$是直角三角形，利用勾股定理可以列出方程．

解： 设缉私艇从 C 处到 B 处需航行 x h，则 $AB=60x$ km，$BC=75x$ km．

根据题意，得

$\triangle ABC$是直角三角形，$AC=30$ km．

于是

$$(60x)^2+30^2=(75x)^2.$$

解这个方程，得

$$x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{2}{3}\text{（不合题意，舍去）}.$$

答： 缉私艇从 C 处到 B 处需航行 $\frac{2}{3}$ h．

问题6　如图 1－5，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm，点 P 从点 A 出发沿 AB 以 1 cm/s的速度向点 B 移动；同时，点 Q 从点 B 出发沿 BC 以 2 cm/s 的速度向点 C 移动．几秒钟后$\triangle DPQ$的面积等于 28 cm²？

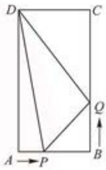


图 1－5

分析： 设 x s 后$\triangle DPQ$的面积为 28 cm²，则 AP、PB、BQ、QC 的长度分别可用含 x 的代数式表示，从而 Rt$\triangle DAP$、Rt$\triangle PBQ$、Rt$\triangle QCD$ 的面积也都可用含 x 的代数式表示，于是可以列出方程．

解： 设 x s 后$\triangle DPQ$的面积等于 28 cm²，则$\triangle DAP$、$\triangle PBQ$、$\triangle QCD$ 的面积分别为$\frac{1}{2}\times12x$、$\frac{1}{2}\times2x(6-x)$、$\frac{1}{2}\times6\times(12-2x)$．

根据题意，得

$$6\times12-\frac{1}{2}\times12x-\frac{1}{2}\times2x(6-x)-\frac{1}{2}\times6\times(12-2x)=28,$$

整理，得

$$x^2-6x+8=0.$$

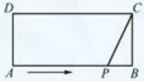
解这个方程，得

$$x_1=2,\ x_2=4.$$

答： 2 s 或 4 s 后△DPQ 的面积等于 28 cm^2.

练习

1. 一个直角三角形的两条直角边的和是28 cm，面积是96 cm^2. 求这个直角三角形两条直角边及斜边的长.
2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=7$ cm，$BC=2\sqrt{2}$ cm，点 P 从点 A 出发沿 AB 以 1 cm/s 的速度向点 B 移动. 点 P 出发几秒后，点 P、A 的距离是点 P、C 的距离的 2 倍.



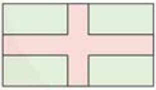
（第 2 题）

1.4 习题

1. 一个两位数的两个数字的和为 9，把这个两位数的个位数字与十位数字互换得到一个新的两位数，它与原两位数的积为 1 458. 求原两位数.
2. 一种药品经过两次降价，药价从每盒 60 元下调至 48.6 元，平均每次降价的百分率是多少？
3. 某农场的粮食产量在两年内从 3 000 t 增加到 3 630 t，平均每年增产的百分率是多少？
4. 如图，一段水管内壁均匀地形成一层厚 3 mm 的矿物沉淀物，导致水管过水的横截面面积减少到原来的$\frac{4}{9}$. 求该水管原来的内径.

（第 4 题）

5. 如图，在长 40 m、宽 22 m 的矩形地面内，修筑两条同样宽且互相垂直的道路，余下的铺上草坪．要使草坪的面积达到 760 m^2，道路的宽应为多少？



（第5题）

6. 把一根长 80 cm 的绳子剪成两段，并把每一段绳子围成一个正方形．

(1) 要使这两个正方形的面积的和等于 200 cm^2，应该怎样剪？

(2) 这两个正方形面积的和可能等于 488 cm^2 吗？

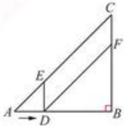
7. 某商店的一种服装，每件成本为 50 元．经市场调研，售价为 60 元时，可销售 800 件；售价每提高 5 元，销售量将减少 100 件．已知商店销售这批服装获利 12 000 元，问这种服装每件售价是多少元？

8. 某体育用品商店销售一批运动鞋，零售价每双 240 元．如果一次购买超过 10 双，那么每多购 1 双，所购运动鞋的单价降低 6 元，但单价不能低于 150 元．一位顾客购买这种运动鞋支付了 3 600 元，这位顾客买了多少双？

9. 一个直角三角形三边的长为连续整数，求这个三角形的斜边长．

10. 建造一个池底为正方形、深度为 2 m 的长方体无盖水池，池壁的造价为每平方米 100 元，池底的造价为每平方米 200 元，总造价为 6 400 元．求该水池池底的边长．

11. 如图，在 Rt△ABC 中，$AB = BC = 12$ cm，点 D 从点 A 出发沿 AB 以2 cm/s的速度向点 B 移动，移动过程中始终保持 $DE \parallel BC$，$DF \parallel AC$（点 E、F 分别在 AC、BC 上）．点 D 出发几秒后四边形 $DFCE$ 的面积为 20 cm^2？



（第11题）

阅读

各类方程的解法

回顾我们曾学过的各类方程的解法：

解一元一次方程，把它转化为 $x=a$ 的形式（去分母、去括号、移项、合并同类项、将未知数的系数化为1）.

解二元一次方程组，把它转化为解一元一次方程（用代入法或加减法消元）；类似的，解三元一次方程组，把它转化为解二元一次方程组.

解一元二次方程，把它转化为解两个一元一次方程（用直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法）.

解分式方程，把它转化为解整式方程（用去分母的方法）. 由于“去分母”可能产生增根，所以解分式方程必须检验.

各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想——转化，把未知转化为已知.

用“转化”的数学思想，我们还可以解一些新的方程. 例如，

一元三次方程 $x^3+x^2-2x=0$，可以通过因式分解把它转化为 $x(x^2+x-2)=0$，解一元一次方程 $x=0$ 和一元二次方程 $x^2+x-2=0$，可得 $x_1=0, x_2=-2, x_3=1$；

无理方程(根号下含有未知数的方程) $\sqrt{x+1}=2$，可以通过方程两边平方把它转化为 $x+1=4$，解得 $x=3$. 通过“方程两边平方”解方程，有可能产生增根，必须对解得的根进行检验. 例如，把方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 两边平方，得 $2x+3=x^2$，解得 $x_1=3, x_2=-1$. 经检验，$x_2=-1$ 不是原方程的根，是增根.

数学活动

矩形绿地中的花圃设计

在一块长是 32 m、宽是 24 m 的矩形绿地内，要围出一个花圃，使花圃面积是矩形面积的一半．你能给出设计方案吗？

思考：花圃可以有多种设计方案，例如，在绿地中间开辟一个矩形的花圃(如图1－6)，使四周的绿地等宽，绿地的面积与花圃的面积相等．你能计算出绿地的宽吗？

图 1－6

探索：请你再设计两种不同的方案．

交流：你的设计方案有哪些特点？

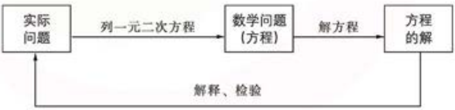
小结与思考

1. 一元二次方程是一元一次方程、二元一次方程组等内容的延伸和发展，是今后学习其他数学知识的基础．

2. 解一元二次方程的基本思路是把它转化为解一元一次方程．转化的实质是“降次”．转化的途径：一是根据平方根的定义，方程两边开平方(直接开平方法、配方法、公式法)；二是通过因式分解，把一元二次方程化成两个一元一次方程(因式分解法)．

一般地，一元二次方程都可以用公式法求解，而根据方程的特点灵活选用方法，可以使求解过程较为简便．

3. 用一元二次方程解决实际问题时，通常要经历以下过程：



用一元二次方程解决实际问题的关键是找出问题中数量之间的相等关系，列出方程．

4. 一元二次方程是揭示现实世界数量关系的一个重要的数学模型．编拟一个用一元二次方程解决的实际问题，并列出方程求解．

复习题

复习巩固

1. 解下列方程：

(1) $x^2-4x-45=0$；

(2) $x(x+4)=-3(x+4)$；

(3) $(4y-1)^2-5=0$；

(4) $(x+3)^2=2x+5$；

(5) $(2x+1)(x-3)=-6$；

(6) $x^2-4\sqrt{2}x+8=0$.

2. 当 x 为何值时，代数式 $2x^2-3$ 的值与 x 的值相等？

3. 已知 $x=2$ 时，二次三项式 $x^2-2mx+4$ 的值等于-4. x 为何值时，这个二次三项式的值是-1？

4. 已知 $y_1=x^2-9$, $y_2=3-x$. x 为何值时，y_1 与 y_2 相等？

5. 已知关于 x 的方程 $x^2-6x+m^2-3m-5=0$ 的一个根是-1. 求 m 的值.

6. 已知一个数的平方与 25 的差等于这个数与 5 的和. 求这个数.

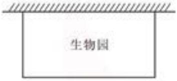
7. 印度古算书中有一首用韵文写成的诗："一群猴子分两队，高高兴兴在游戏. 八分之一再平方，蹦蹦跳跳树林里. 其余十二高声喊，充满活跃的空气. 告我总数共多少，两队猴子在一起？"

大意是说：一群猴子分成两队，一队猴子数是猴子总数的 $\frac{1}{8}$ 的平方，另一队猴子数是 12，那么这群猴子的总数是多少？

8. 某工厂两年内产值翻了一番，求该工厂产值年平均增长的百分率（精确到 0.1%）.

9. 一个直角三角形的斜边长 $2\sqrt{5}$ cm，两条直角边长的和是 6 cm. 求这两条直角边的长.

10. 学校打算用长 16 m 的篱笆围成一个长方形的生物园饲养小兔，生物园的一面靠墙(如图)，面积是 $30\ m^2$. 求这个生物园的长和宽.



(第 10 题)

(第 11 题)

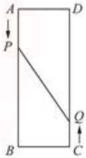
11. 如图，用长 6 m 的铝合金条制成“日”字形窗框，窗框的宽和高各是多少时，窗户的透光面积为 $1.5\ m^2$(铝合金条的宽度不计)?

灵活运用

12. 某剧院举办文艺演出. 经调研，如果票价定为每张 30 元，那么 1 200 张门票可以全部售出；如果票价每增加 1 元，那么售出的门票就减少 30 张. 要使门票收入达到 36 750 元，票价应定为多少元?

13. 一个容器盛满纯药液 63 L，第一次倒出一部分纯药液后，用水加满；第二次又倒出同样多的药液，若此时容器内剩下的纯药液是 28 L，则每次倒出的液体是多少?

14. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 16$ cm，$BC = 6$ cm，点 P 从点 A 出发沿 AB 以 3 cm/s 的速度向点 B 移动，一直到达点 B 为止；同时，点 Q 从点 C 出发沿 CD 以2 cm/s 的速度向点 D 移动. 经过多长时间 P、Q 两点之间的距离是 10 cm?



(第 14 题)

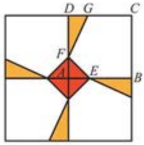
15. 已知 5 个连续整数的和是 m，它们的平方和是 n，且 $n = 2(6m + 5)$. 求这 5 个连续整数.

16. 某农场去年种植南瓜 10 亩，总产量为 20 000 kg. 今年该农场扩大了种植面积，并引进新品种，使总产量增长到60 000 kg. 已知种植面积的增长率是平均亩产量增长率的 2 倍，求平均亩产量的增长率.

探索研究

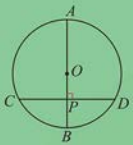
17. 写出一个一元二次方程，使它的两个根分别是 3、-2.

18. 如图，一个边长为 8 m 的正方形花坛由 4 块全等的小正方形组成．在小正方形 $ABCD$ 中，点 G、E、F 分别在 CD、AB、AD 上，且 $DG=1$ m，$AE=AF$．在$\triangle AEF$、$\triangle DFG$、五边形 $EBCGF$ 三个区域上种植不同的花卉，每平方米的种植成本分别是 20 元、20 元、10 元．问点 E 在什么位置时，正方形花坛种植花卉所需的总费用是 715 元？



（第 18 题）

第2章 对称图形——圆



$PC = PD$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$

红日、车轮、硬币……圆的形象完美、和谐．圆的对称性蕴含了圆的许多性质．

如图，篮球场地上画有一些圆形、圆弧形的图案．

(1) 你知道这些图案的含义吗?

(2) 到学校篮球场上实际测量这些圆或半圆的直径，计算它们的周长和面积．

你还知道体育运动中，哪些项目的场地上画有圆形或圆弧形的图案？请与同学交流．

图(1)～图(4)中的正方形的边长都相等，曲线都是圆或圆弧，它们阴影部分的面积都相等吗?

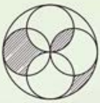
图（1）

图（2）

图（3）

图（4）

图(5)中 4 个小圆的面积相等，大圆的半径等于小圆的直径．探索图中阴影部分的面积与大圆的面积之间的数量关系，并说明理由．



图（5）

本章将在小学学习的基础上，进一步研究圆的性质，探索点与圆、直线与圆的位置关系．

2.1 圆

战国时期数学家墨子撰写的《墨经》一书中，就有“圆，一中同长也”的记载．你理解这句话的意思吗？

如图 2－1，在平面内把线段 OP 绕着端点 O 旋转 1 周，端点 P 运动所形成的图形叫做**圆**(circle)．其中，点 O 叫做**圆心**(centre of a circle)，线段 OP 叫做**半径**(radius)．

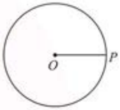


图 2－1

以点 O 为圆心的圆，记作“$\odot O$”，读作“圆 O”．

操作与思考

在纸上画一个圆、一个点，这个点与圆的位置关系有哪几种？这个点到圆心的距离与圆的半径的大小关系有哪几种？怎样用数量之间的关系来描述点与圆的位置关系？

通过操作、观察可以发现：

圆上的点(如图 2－2 中的点 P)到圆心的距离都等于半径，到圆心的距离等于半径的点都在圆上．也就是说，圆是到定点（圆心）的距离等于定长（半径）的点的集合．

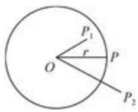


图 2－2

圆内的点(如图 2 - 2 中的点 P_1)到圆心的距离都小于半径，到圆心的距离小于半径的点都在圆内．也就是说，圆的内部是到圆心的距离小于半径的点的集合．

圆外的点(如图 2 - 2 中的点 P_2)到圆心的距离都大于半径，到圆心的距离大于半径的点都在圆外．也就是说，圆的外部是到圆心的距离大于半径的点的集合．

如果⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心 O 的距离为 d，那么

点 P 在圆内$\Leftrightarrow d < r$；

点 P 在圆上$\Leftrightarrow d = r$；

点 P 在圆外$\Leftrightarrow d > r$．

符号“⇔”读作“等价于”，它表示从左端可以推出右端，从右端也可以推出左端．

尝试与交流

如图 2 - 3，线段 $PQ = 2$ cm．

(1) 画出下列图形：

到点 P 的距离等于 1 cm 的点的集合；

到点 Q 的距离等于 1.5 cm 的点的集合．

图 2 - 3

(2) 在所画图中，到点 P 的距离等于 1 cm，且到点 Q 的距离等于 1.5 cm 的点有几个？在图中将它们表示出来．

(3) 在所画图中，到点 P 的距离小于或等于 1 cm，且到点 Q 的距离大于或等于 1.5 cm 的点的集合是怎样的图形？在图中将它表示出来．

练习

1. 已知⊙O 的半径为 4 cm．如果点 P 到圆心 O 的距离为 4.5 cm，那么点 P 与⊙O 有怎样的位置关系？如果点 P 到圆心 O 的距离为 4 cm、3 cm 呢？
2. 用图形表示到点 A 的距离小于或等于2 cm的点的集合．
3. 已知矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O．点 A、B、C、D 是否在以点 O 为圆心的同一个圆上？为什么？

连接圆上任意两点的线段叫做**弦**（chord）．经过圆心的弦叫做**直径**（diameter）．如图 2－4，CD 是⊙O 的弦，AB 是⊙O 的直径．

圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称**弧**（arc），用符号“$\frown$”表示．如图 2－4，以 C、D 为端点的弧，记作$\overset{\frown}{CD}$，读作“弧 CD”．

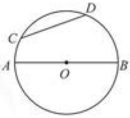


图 2－4

圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每条弧都叫做半圆．大于半圆的弧叫做**优弧**（major arc），小于半圆的弧叫做**劣弧**（minor arc）．如图 2－5，$\overset{\frown}{BAC}$是优弧，$\overset{\frown}{BC}$是劣弧．

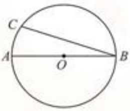


图 2－5

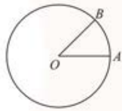


图 2－6

顶点在圆心的角叫做**圆心角**（central angle）．如图 2－6，$\angle AOB$ 是圆心角．

圆心相同，半径不相等的两个圆叫做**同心圆**（concentric circles）．能够互相重合的两个圆叫做**等圆**（equal circle）．能够互相重合的弧叫做**等弧**（equal arc）．

同圆或等圆的半径相等．

例 如图 2－7，点 A、B 和点 C、D 分别在以点 O 为圆心的两个同心圆上，且 $\angle AOB=\angle COD$．$\angle C$ 与 $\angle D$ 相等吗？为什么？

解：$\angle C$ 与 $\angle D$ 相等．

$\because \angle AOB=\angle COD$，

$\therefore \angle BOC=\angle AOD$．

又 $\because OB=OA, OC=OD$（同圆的半径相等），

$\therefore \triangle BOC \cong \triangle AOD$．

$\therefore \angle C=\angle D$．

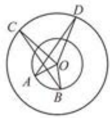


图 2－7

思考与探索

如图 2－8，AB 是⊙O 的直径，C 是 BA 延长线上一点，点 D 在⊙O 上，且 CD＝OA，CD 的延长线交⊙O 于点 E．若 $\angle C=20°$，求 $\angle BOE$ 的度数．

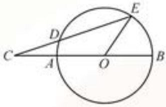
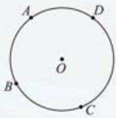


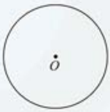
图 2－8

练习

1. 如图，点 A、B、C、D 在⊙O 上．在图中画出以这 4 点中的 2 点为端点的弦，这样的弦共有几条？是哪几条？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 在图中，画出⊙O 的两条直径，依次连接这两条直径的端点，得到一个四边形．判断这个四边形的形状，并说明理由．

3. 如图，AB 是⊙O 的弦，点 C、D 在 AB 上，且 $AC=BD$．判断△OCD 的形状，并说明理由．

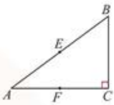
（第3题）

2.1 习题

1. 已知⊙O 的半径为 3 cm，A 是线段 OP 的中点．根据下列条件，判断点 A 与⊙O 的位置关系：

(1) $OP=4$ cm；(2) $OP=6$ cm；(3) $OP=8$ cm．

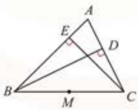
2. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，E、F 分别是 AB、AC 的中点．以点 B 为圆心，BC 为半径画圆，判断点 A、C、E、F 与⊙B 的位置关系，并说明理由．



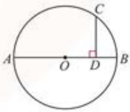
（第2题）

3. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$AD=12$，以点 A 为圆心画圆，使点 B 在⊙A 内，点 C 在⊙A 外．求⊙A 的半径 r 的取值范围．

4. 如图，BD、CE 是△ABC 的高，M 是 BC 的中点．点 B、C、D、E 是否在以点 M 为圆心的同一个圆上？为什么？



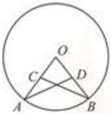
（第4题）



（第5题）

5. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，且 $CD\perp AB$，垂足为 D，$CD=4$，$OD=3$．求 AB 的长．

6. 如图，OA、OB 是$\odot O$ 的半径，C、D 分别是 OA、OB 的中点．AD 与 BC 相等吗？为什么？

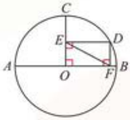


（第 6 题）

（第 7 题）

7. 如图，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的半径 OA、OB 分别交小圆于点C、D．AB 与 CD 有怎样的位置关系？为什么？

8. 如图，$\odot O$ 的直径 $AB=4$，半径 $OC\perp AB$，点 D 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上，$DE\perp OC$，$DF\perp AB$，垂足分别为 E、F．求 EF 的长．



（第 8 题）

2.2 圆的对称性

轮子绕固定轴心旋转，不论转到什么位置，都与初始位置重合．

一个圆绕圆心旋转任何角度后，都能与原来的图形重合．

圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心．

操作与思考

1. 在两张透明纸片上，分别画半径相等的⊙O 和⊙O'．

2. 在⊙O 和⊙O'中，分别画相等的圆心角$\angle AOB$ 和$\angle A'O'B'$，连接 AB、$A'B'$(如图 2－9)．

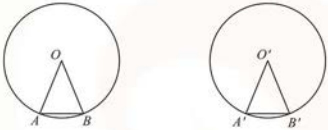


图 2－9

在所画图中还有哪些相等的线段、相等的弧？

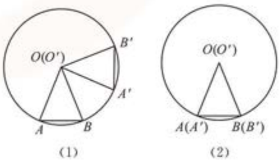


图 2－10

我们可以运用图形运动的方法证实小丽、小明的猜想：

将图 2－9 中的两张纸片叠合在一起，使点 O 与点 O'重合(如图 2－10(1))，再将 ⊙O' 绕点O旋转，使射线 $O'A'$ 与射线

OA重合．因为$\angle A'O'B'=\angle AOB$，所以射线$O'B'$与射线OB重合．又因为$O'A'=OA$，$O'B'=OB$，所以点A'与点A重合，点B'与点B重合(如图2－10(2))．这样，$\overset{\frown}{A'B'}$与$\overset{\frown}{AB}$重合，$A'B'$与AB重合，即$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$．

上面的结论，在同圆中也成立．

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等．

思考与探索

在同圆或等圆中，如果圆心角所对的弧相等，那么它们所对的弦相等吗？这两个圆心角相等吗？为什么？

如果圆心角所对的弦相等呢？

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等．

我们知道，将顶点在圆心的周角等分成360份，每一份圆心角是1°的角．因为同圆中相等的圆心角所对的弧相等，所以整个圆也被等分成360份．我们把1°的圆心角所对的弧叫做1°的弧（如图2-11)．

一般地，$n°$的圆心角对着$n°$的弧，$n°$的弧对着$n°$的圆心角．

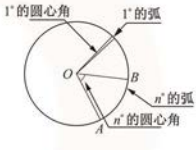


图2－11

圆心角的度数与它所对的弧的度数相等．

例1 如图2－12，AB、AC、BC是$\odot O$的弦，$\angle AOC=\angle BOC$．$\angle ABC$与$\angle BAC$相等吗？为什么？

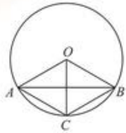


图2－12

解：$\angle ABC$与$\angle BAC$相等．

在$\odot O$中，

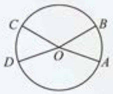
$\because \angle AOC = \angle BOC$，

$\therefore AC = BC$（在同圆中，相等的圆心角所对的弦相等）.

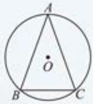
$\therefore \angle ABC = \angle BAC$.

练习

1. 如图，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，$\angle AOB = 50°$. 求$\angle COD$的度数.

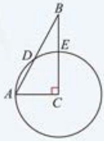


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$，$\angle A = 40°$. 求$\angle ABC$的度数.
3. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$\angle B = 28°$，以点C为圆心，CA为半径的圆交AB于点D，交BC于点E. 求$\overset{\frown}{AD}$、$\overset{\frown}{DE}$的度数.



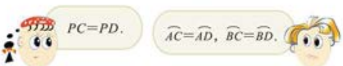
（第 3 题）

在纸上画$\odot O$，把$\odot O$剪下并折叠，使折痕两旁的部分完全重合，你发现了什么？

圆是轴对称图形，过圆心的任意一条直线都是它的对称轴.

操作与思考

画$\odot O$和$\odot O$的直径AB、弦CD，使$AB \perp CD$，垂足为P（如图 2－13）. 在所画图中有哪些相等的线段、相等的弧？



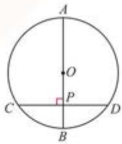


图 2－13

我们可以运用图形运动的方法证实小丽、小明的猜想：

将图 2－13 中的$\overset{\frown}{ADB}$沿直径 AB 翻折．因为圆是轴对称图形，过圆心的任意一条直线都是它的对称轴，所以$\overset{\frown}{ADB}$与$\overset{\frown}{ACB}$重合．又因为$\angle APD=\angle APC=90^\circ$，所以射线 PD 与射线 PC 重合(如图 2－14)，于是点 D 与点 C 重合．

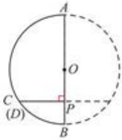


图 2－14

这样，$PC=PD$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.

以上结论还可以用下面的方法加以证实：

如图 2－15，AB 是$\odot O$的直径，CD 是$\odot O$的弦，$AB\perp CD$，垂足为 P．

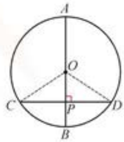


图 2－15

连接 OC、OD．

在$\triangle OCD$中，

$\because OC=OD$，$OP\perp CD$，

$\therefore PC=PD$，$\angle BOC=\angle BOD$.

$\therefore \angle AOC=\angle AOD$.

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$（同圆中，相等的圆心角所对的弧相等）.

于是，我们得到如下定理：

***垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧．**

例 2 如图 2－16，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 交小圆于点 C、D．AC 与 BD 相等吗？为什么？

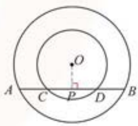


图 2－16

解：AC 与 BD 相等．

过点 O 作 $OP\perp AB$，垂足为 P．

$\because OP\perp AB$，

$\therefore AP=BP$，$CP=DP$（垂直于弦的直径平分弦）.

$\therefore AP-CP=BP-DP$，

即 $AC=BD$．

拓展与延伸

如图 2 - 17，AB、CD 是 $\odot O$ 的两条弦，$AB/\!/CD$．$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BD}$相等吗？为什么？

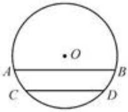
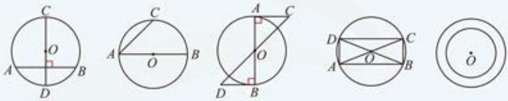


图 2 - 17

练习

1. 如何确定圆形纸片的圆心？说说你的想法．
2. (1) 下列图形中，哪些是轴对称图形？哪些是中心对称图形？如果是轴对称图形，指出它的对称轴；如果是中心对称图形，指出它的对称中心．



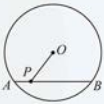
①　②　③　④　⑤

（第 2 题）

(2) 当图①中的弦 AB 为直径（AB 与 CD 互相垂直的条件不变）时，图形具有怎样的对称性？

(3) 当图②中的点 B 在 $\odot O$ 上运动到什么位置时，图形成为轴对称图形？

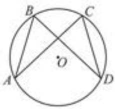
*3. 如图，$\odot O$ 的直径为 10，弦 AB 的长为 8，点 P 在 AB 上运动．求 OP 的取值范围．



（第 3 题）

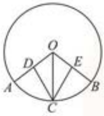
习题 2.2

1. 画一个圆和圆的一些弦，使所画图形分别满足下列条件：
   (1) 是中心对称图形，但不是轴对称图形；
   (2) 是轴对称图形，但不是中心对称图形；
   (3) 既是轴对称图形，又是中心对称图形．
2. 如图，点 A、B、C、D 在 $\odot O$ 上，且 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}$．$AC$ 与 BD 相等吗？为什么？

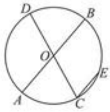


（第 2 题）

3. 如图，OA、OB、OC 是 $\odot O$ 的半径，且 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$D$、$E$ 分别是 OA、OB 的中点．CD 与 CE 相等吗？为什么？



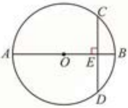
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CE \parallel AB$，$\overset{\frown}{CE}$ 为 $40°$．求 $\angle AOC$ 的度数．

*5. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 $AB=10$，弦 $CD\perp AB$，垂足为 E，$OE=3$．求弦 CD 的长．

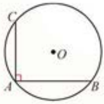


（第 5 题）

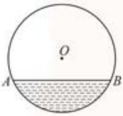
（第 6 题）

*6. 如图，过 $\odot O$ 内一点 P 画弦 AB，使 P 是 AB 的中点．

*7. 如图，AB、AC 是 $\odot O$ 的两条弦，且 $AB\perp AC$，$AB=8$，$AC=6$．求 $\odot O$ 的半径．



（第 7 题）



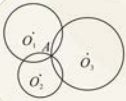
（第 8 题）

*8. 在直径为 650 mm 的圆柱形油罐内装进一些油后，其横截面如图．若油面宽 $AB=600$ mm，求油的最大深度．

2.3 确定圆的条件

操作与思考

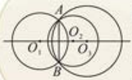
1. 怎样作一个圆，使它经过已知点 A？这样的圆可以作多少个？



在平面内任取一点，以这点为圆心，它到点A的距离为半径作圆．经过点A的圆可以作无数个．

2. 怎样作一个圆，使它经过已知点 A、B？这样的圆可以作多少个？

圆心到点A、B的距离相等，圆心应在线段AB的垂直平分线上．



以线段AB的垂直平分线上任意一点为圆心，这点到点A的距离为半径作圆．经过点A、B的圆可以作无数个．

3. 能否作一个圆，使它经过 A、B、C 三点？如果能，这样的圆可以作多少个？

经过A、B、C三点作圆，圆心应在线段AB的垂直平分线l_1上，又在线段BC的垂直平分线l_2上．

l_1与l_2可能平行，也可能相交．

如图 2－18，当 A、B、C 三点在一条直线上时，线段 AB、BC 的垂直平分线 l_1、l_2 相互平行，它们没有交点，不能作出经过 A、B、C 三点的圆．

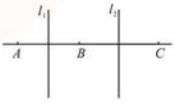


图 2－18

如图 2-19，当 A、B、C 三点不在一条直线上时，l_1 与 l_2 相交．

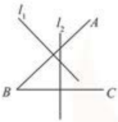


图 2-19

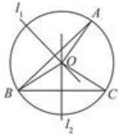


图 2-20

设 l_1 与 l_2 的交点为 O(如图 2-20)，因为 $OA=OB=OC$，所以以点 O 为圆心，OA 为半径的圆经过 A、B、C 三点．又因为 l_1 与 l_2 相交，只有一个交点，所以经过 A、B、C 三点的圆有且只有一个．

不在同一条直线上的三点确定一个圆．

三角形的三个顶点确定一个圆，这个圆叫做**三角形的外接圆**(circumcircle of triangle)．外接圆的圆心叫做**三角形的外心**(circumcenter of triangle)，这个三角形叫做圆的内接三角形．如图 2-21，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形．

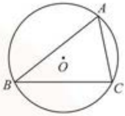
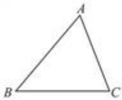


图 2-21

尝试与交流

怎样用直尺和圆规作三角形的外接圆？

已知 $\triangle ABC$．根据下列作法，用直尺和圆规作 $\triangle ABC$ 的外接圆．

作　法	图　形
1. 分别作边 AB、BC 的垂直平分线 l_1、l_2，l_1 与 l_2 的交点为 O． 2. 以点 O 为圆心，OA 为半径作圆．$\odot O$ 就是所求作的圆．	

练习

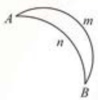
1. 如图，已知$\overset{\frown}{AB}$. 试确定$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心．

（第1题）

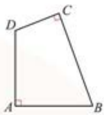
2. 通过作图我们知道，当$\triangle ABC$是锐角三角形时，外心O在三角形的内部．当$\triangle ABC$是直角三角形、钝角三角形时，外心O在什么位置？分别作出它们的外接圆，验证你的猜想．

2.3 习题

1. 如图，在围成新月形的两条弧（$\overset{\frown}{AmB}$和$\overset{\frown}{AnB}$）中，哪一条弧的半径较大？分别作出它们所在的圆，验证你的猜想．



（第1题）



（第3题）

2. 已知$AB=4$ cm，作半径为3 cm的圆，使它经过A、B两点，这样的圆能作多少个？如果半径为2 cm呢？
3. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle C=90°$．经过A、B、D三点作$\odot O$，点C在$\odot O$上吗？试说明理由．

2.4 圆周角

观察与思考

图 2－22 中的$\angle BA_1C$、$\angle BA_2C$、$\angle BA_3C$有什么共同特征？

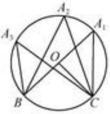


图 2－22

顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做圆周角（angle in a circular segment）．如图 2－22，$\angle BA_1C$、$\angle BA_2C$、$\angle BA_3C$都是$\odot O$中$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角．

操作与思考

1．在图 2－23 中，$OB\perp OC$，画$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角$\angle BAC$．$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角可以画多少个？你所画的圆周角为多少度？试说明理由．

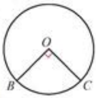


图 2－23

2．在图 2－24 中，$\angle BOC=60°$，画$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角$\angle BAC$．你所画的圆周角为多少度？为什么？你还有什么发现？

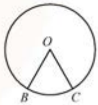
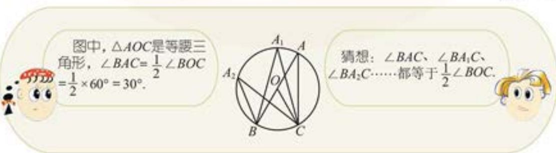
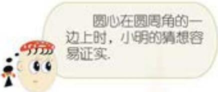


图 2－24



小明的猜想是否成立？怎样证实呢？



小明的猜想可以证实如下：

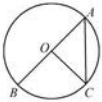
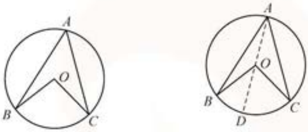


图 2 - 25

(1) 先研究圆心在圆周角的一边上的情形.

如图 2 - 25，由 $OC=OA$，可得 $\angle OCA=\angle OAC$，于是 $\angle BOC=\angle OCA+\angle OAC=2\angle OAC$，即 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

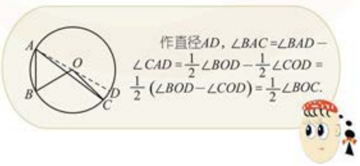
(2) 对于圆心在圆周角内部的情形(如图 2 - 26(1))，只要作直径 AD(如图 2 - 26(2))，圆周角 $\angle BAC$ 就分成了两个圆周角 $\angle BAD$、$\angle CAD$，且圆心 O 在它们的边 AD 上，由(1)可知：$\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BOD+\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle COD)=\frac{1}{2}\angle BOC$.



(1)　　　　(2)

图 2 - 26

(3) 对于圆心在圆周角外部的情形，你能证明 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ 吗？



于是，我们得到如下定理：

圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半，同弧或等弧所对的圆周角相等．

因为圆心角的度数与它所对的弧的度数相等，所以我们也可以说，圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半．

例1 如图 2－27，$\odot O$ 的弦 AB、DC 的延长线相交于点 E，$\angle AOD=150^\circ$，$\overset{\frown}{BC}$ 为 70°．求$\angle ABD$、$\angle AED$ 的度数．

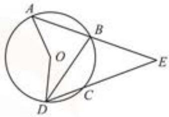


图 2－27

解： 在$\odot O$ 中，

$\because \angle AOD=150^\circ$，

$\therefore \angle ABD=75^\circ$（圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半）．

$\because \overset{\frown}{BC}$为 70°，

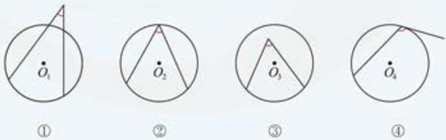
$\therefore \angle BDC=35^\circ$（圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半）．

又$\because \angle ABD=\angle AED+\angle BDC$，

$\therefore \angle AED=\angle ABD-\angle BDC=75^\circ-35^\circ=40^\circ$．

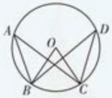
练习

1. 下列各图中的角是否是圆周角？为什么？

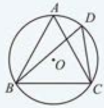


（第1题）

2. 如图，点 A、B、C、D 在⊙O 上，$\angle BAC=35^\circ$．求$\angle BDC$、$\angle BOC$ 的度数．



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，点 A、B、C、D 在⊙O 上，$\angle ACB=\angle BDC=60^\circ$，$BC=3$．求$\triangle ABC$ 的周长．

思考与探索

1. 在图 2-28 中，BC 是⊙O 的直径，圆周角$\angle BAC$ 为多少度？为什么？

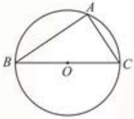
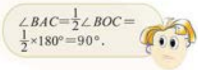


图 2-28



2. 在图 2-29 中，圆周角 $\angle BAC=90^\circ$. 若连接 BC，则 BC 过圆心 O 吗？为什么？

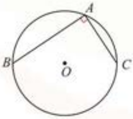
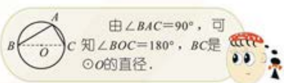


图 2-29



直径所对的圆周角是直角，90°的圆周角所对的弦是直径．

例 2 如图 2-30，AB 是⊙O 的直径，弦 CD 交 AB 于点 E，$\angle ACD=60^\circ$，$\angle ADC=50^\circ$．求 $\angle CEB$ 的度数．

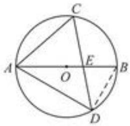


图 2-30

解：连接 DB．

∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ADB=90^\circ$（直径所对的圆周角是直角）．

∵ $\angle ADC=50^\circ$，

∴ $\angle EDB=\angle ADB-\angle ADC=90^\circ-50^\circ=40^\circ$．

又∵ $\angle ABD=\angle ACD=60^\circ$（同弧所对的圆周角相等），

∴ $\angle CEB=\angle ABD+\angle EDB=60^\circ+40^\circ=100^\circ$．

例 3 如图 2-31，BC 是⊙O 的直径，点 A 在⊙O 上，$AD\perp BC$，垂足为 D，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AB}$，$BE$ 分别交 AD、AC 于点 F、G．判断△FAG 的形状，并说明理由．

解：△FAG 是等腰三角形．

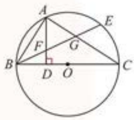


图 2-31

∵ BC 是⊙O 的直径，

∴ $\angle BAC=90^\circ$（直径所对的圆周角是直角）．

∴ $\angle ABE+\angle AGB=90^\circ$．

∵ $AD\perp BC$，

∴ $\angle ACB+\angle DAC=90^\circ$．

又∵ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AB}$，

∴ $\angle ABE=\angle ACB$（等弧所对的圆周角相等）．

∴ $\angle AGB=\angle DAC$．

∴ △FAG 是等腰三角形．

拓展与延伸

在例 3 中，若点 E 与点 A 在直径 BC 的两侧，BE、AC 的延长线交于点 G，AD 的延长线交 BE 于点 F，其余条件不变(如图2－32)，例 3 中的结论还成立吗？

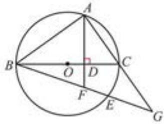
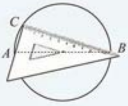


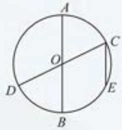
图 2－32

练习

1. 利用三角尺可以确认图中的弦 AB 是圆的直径，为什么？你能用这种方法确定一个圆形工件的圆心吗？

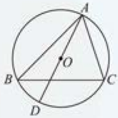


(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CE /\!/ AB$，$\overset{\frown}{BD}$与$\overset{\frown}{BE}$相等吗？为什么？
3. 如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，直径 $AD = 4$，$\angle ABC = \angle DAC$．求 AC 的长．



(第 3 题)

一个四边形的 4 个顶点都在同一个圆上，这个四边形叫做**圆的内接四边形**(quadrilateral in a circle)，这个圆叫做四边形的外接圆．如图 2－33，四边形 $ABCD$ 是$\odot O$的内接四边形，$\odot O$ 是四边形$ABCD$的外接圆．

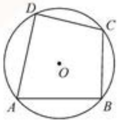


图 2－33

思考与探索

1. 如图 2－34，在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，BD 是⊙O 的直径．$\angle A$ 与 $\angle C$、$\angle ABC$ 与 $\angle ADC$ 有怎样的数量关系？

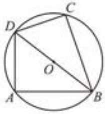
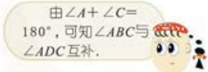


图 2－34



2. 如图 2－35，若圆心 O 不在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 的对角线上，小明、小丽发现的结论是否仍然成立？

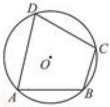
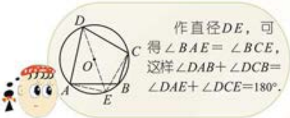
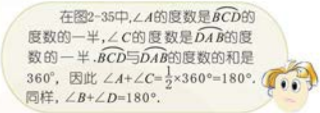


图 2－35





于是，我们得到如下定理：

圆内接四边形的对角互补．

例 4 如图 2－36，在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle C=110°$．若点 E 在 $\overset{\frown}{AD}$ 上，求 $\angle E$ 的度数．

解： 连接 BD．

∵ 四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

∴ $\angle BAD+\angle C=180°$（圆内接四边形的对角互补）．

∴ $\angle BAD=180°-\angle C=180°-110°=70°$．

在△ABD 中，

∵ $AB=AD$，$\angle BAD=70°$，

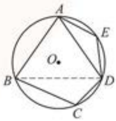


图 2－36

$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2} \times (180° - 70°) = 55°$.

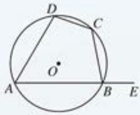
又 $\because$ 四边形 $ABDE$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$\therefore \angle ABD + \angle E = 180°$（圆内接四边形的对角互补）.

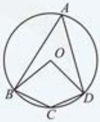
$\therefore \angle E = 180° - \angle ABD = 180° - 55° = 125°$.

练习

1. 圆的内接平行四边形是矩形吗？为什么？
2. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，$\angle CBE$ 是它的一个外角．若 $\angle D = 100°$，求 $\angle CBE$ 的度数．



（第 2 题）

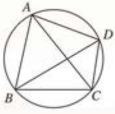


（第 3 题）

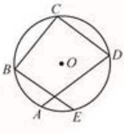
3. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，$\angle C = 130°$．求 $\angle BOD$ 的度数．

2.4 习题

1. 如图，点 A、B、C、D 在同一个圆上．图中有几对相等的圆周角？是哪几对？



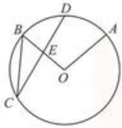
（第 1 题）



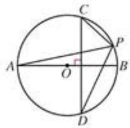
（第 2 题）

2. 如图，点 A、B、C、D、E 在 $\odot O$ 上，且 $\overset{\frown}{AE}$ 为 40°．求 $\angle B + \angle D$ 的度数．

3. 如图，点A、B、C在⊙O上，D是$\overset{\frown}{AB}$的中点，CD交OB于点E．若$\angle AOB=100°$，$\angle OBC=55°$，求$\angle OEC$的度数．



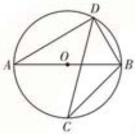
（第3题）



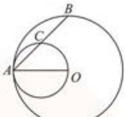
（第4题）

*4. 如图，AB是⊙O的直径，CD是⊙O的弦，$CD\perp AB$，P是$\overset{\frown}{CD}$上一点(不与点C、D重合)．$\angle APC$与$\angle APD$相等吗？为什么？

5. 如图，AB是⊙O的直径，CD是⊙O的弦，$\angle DCB=30°$．求$\angle ABD$的度数．



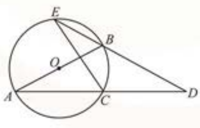
（第5题）



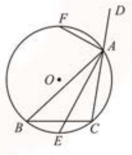
（第6题）

*6. 如图，AB是⊙O的弦，以OA为直径的圆交AB于点C．若$AB=10$，求AC的长．

7. 如图，AB是⊙O的直径，D是弦AC的延长线上一点，且$CD=AC$，DB的延长线交⊙O于点E．CD与CE相等吗？为什么？



（第7题）

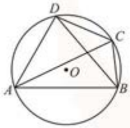


（第8题）

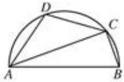
8. 如图，△ABC是⊙O的内接三角形，∠BAD是△ABC的一个外角，∠BAC、∠BAD的平分线分别交⊙O于点E、F．若连接EF，则EF与BC有怎样的位置关系？为什么？

9. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数之比为 3∶4∶6. 求四边形 $ABCD$ 各内角的度数.

10. 如图，在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD = 60°$，$\angle ACB = 70°$. 求 $\angle BCD$ 和 $\angle ABD$ 的度数.



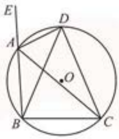
（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，AB 是半圆的直径，C、D 是半圆上的两点，且 $\angle BAC = 20°$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$. 求四边形 $ABCD$ 各内角的度数.

12. 如图，在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中，$DB = DC$，$\angle DAE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角. $\angle DAE$ 与 $\angle DAC$ 相等吗？为什么？



（第 12 题）

2.5 直线与圆的位置关系

山水相接的地方出现了一道红霞．过了一会儿，那里出现了太阳的小半边脸．慢慢儿，一纵一纵地使劲儿向上升．到了最后，它终于冲破了云霞，完全跳出了海面．

——巴　金

先在纸上画一个圆，再将一把直尺在纸上平移．如果把直尺的边缘看作一条直线，那么在直尺平移的过程中，直线与圆的位置关系怎样变化？这种变化怎样用数量之间的关系来描述？

直线与圆有两个公共点时，叫做直线与圆相交．

直线与圆有唯一公共点时，叫做直线与圆相切，这条直线叫做**圆的切线**(tangent line of a circle)，这个公共点叫做**切点**(tangent point)．

直线与圆没有公共点时，叫做直线与圆相离．

如图 2－37，$OD \perp l$，垂足为 D，$\odot O$ 的半径为 r.

在图 2－37(1)中，直线 l 与$\odot O$ 相交，$OD<r$；

在图 2－37(2)中，直线 l 与$\odot O$ 相切，$OD=r$；

在图 2－37(3)中，直线 l 与$\odot O$ 相离，$OD>r$.

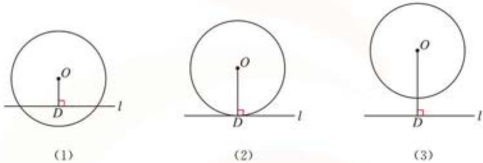


图 2－37

于是，我们得到如下结论：

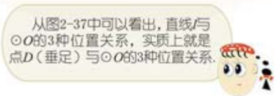
如果$\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，那么

直线 l 与$\odot O$ 相交$\Leftrightarrow d<r$；

直线 l 与$\odot O$ 相切$\Leftrightarrow d=r$；

直线 l 与$\odot O$ 相离$\Leftrightarrow d>r$.

点与圆有 3 种不同的位置关系，直线与圆也有 3 种不同的位置关系，这两者之间有怎样的联系？



例 1 已知$\angle BAC = 45°$，点O在AC上，且$AO = 4$，以点O为圆心，r为半径画圆．根据下列r的值，判断AB所在直线与$\odot O$的位置关系：

(1) $r = 2$；　(2) $r = 2\sqrt{2}$；　(3) $r = 3$．

解： 过点O作$OD \perp AB$，垂足为D(如图 2－38)．

在$\text{Rt}\triangle AOD$中，

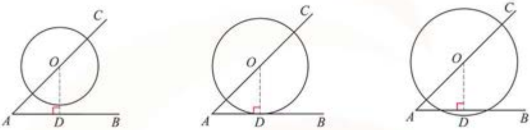
$\because \angle A = 45°$，

$\therefore \angle AOD = \angle A$，$OD = AD$．

又$\because OD^2 + AD^2 = AO^2$，$AO = 4$，

$\therefore 2OD^2 = 16$，$OD = 2\sqrt{2}$，

即　圆心O到AB所在直线的距离$d = 2\sqrt{2}$．



(1)　(2)　(3)

图 2－38

(1) 当$r = 2$时，$d > r$，AB所在直线与$\odot O$相离(如图2－38(1))；

(2) 当$r = 2\sqrt{2}$时，$d = r$，AB所在直线与$\odot O$相切(如图 2－38(2))；

(3) 当$r = 3$时，$d < r$，AB所在直线与$\odot O$相交(如图 2－38(3))．

练习

1. 填表：

直线与圆的位置关系	图　形	公共点个数	直线的名称	公共点名称	圆心到直线的距离 d 与半径r 的关系
相　交					
相　切					
相　离					

2. 已知$\odot O$的直径为 8，圆心O到直线l的距离为 5．直线l与$\odot O$有怎样的位置关系？圆心O到直线l的距离为 4 或 3 呢？

操作与思考

在图 2－39 中，经过⊙O 的半径 OD 的外端点 D，作直线$l \perp OD$，直线 l 与⊙O 有怎样的位置关系？为什么？

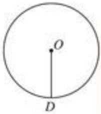


图 2－39

如图 2－40，因为圆心 O 到直线 l 的距离 OD 等于⊙O 的半径 r，所以直线 l 与⊙O 相切．

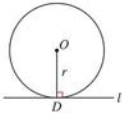


图 2－40

于是，我们得到如下结论：

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线．

思考与探索

如图 2－41，直线 l 是⊙O 的切线，切点为 D．直线 l 与半径 OD 有怎样的位置关系？为什么？

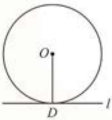


图 2－41

我们可以用反证法证明 $l \perp OD$．

假设直线 l 与 OD 不垂直，过圆心 O 作 $OD' \perp l$，垂足为 D'（如图2－42）．因为直线 l 与⊙O 相切，所以圆心 O 到直线 l 的距离 OD' 等于⊙O 的半径，点 D' 在⊙O 上．这样，直线 l 与⊙O 有两个公共点 D、D'．这与“直线 l 与⊙O 相切”矛盾，所以 $l \perp OD$．

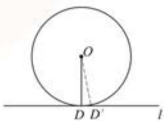


图 2－42

于是，我们得到如下结论：

圆的切线垂直于经过切点的半径.

例 2 如图 2-43，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle CAD=\angle ABC$. 判断直线 AD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由.

解： 直线 AD 与 $\odot O$ 相切.

$\because$ AB 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore$ $\angle ACB=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle ABC+\angle BAC=90^\circ$.

又 $\because$ $\angle CAD=\angle ABC$，

$\therefore$ $\angle CAD+\angle BAC=90^\circ$，

即 $AD\perp AB$.

$\therefore$ 直线 AD 与 $\odot O$ 相切（经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线）.

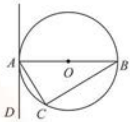


图 2-43

例 3 如图 2-44，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 AD 平分 $\angle BAC$，过点 D 的切线交 AC 于点 E. DE 与 AC 有怎样的位置关系？为什么？

解： DE 与 AC 互相垂直.

连接 OD.

$\because$ $OD=OA$，

$\therefore$ $\angle ODA=\angle OAD$.

又 $\because$ $\angle OAD=\angle CAD$，

$\therefore$ $\angle ODA=\angle CAD$.

$\therefore$ $OD\parallel AC$.

$\because$ DE 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore$ $DE\perp OD$（圆的切线垂直于经过切点的半径），

即 $\angle ODE=90^\circ$.

于是，$\angle DEA=90^\circ$，$DE\perp AC$.

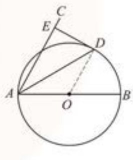
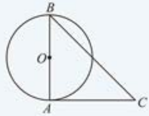


图 2-44

练习

1. 如图，点 P 在⊙O 上，过点 P 画⊙O 的切线.

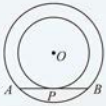
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在△ABC 中，$\angle ABC = 45°$，$AB = AC$. 直线 AC 与以 AB 为直径的⊙O 有怎样的位置关系？为什么？

*3. 如图，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 切小圆于点 P. PA 与 PB 相等吗？为什么？

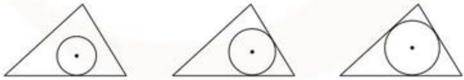


（第 3 题）

尝试与交流

要从一块三角形铁皮余料中剪一个圆，如何使剪得的圆面积最大？

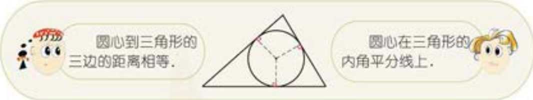
观察图 2－45 可以发现，要使剪得的圆面积最大，这个圆应与三角形的各边都相切.



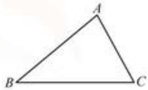
（1）　　（2）　　（3）

图 2－45

如何作一个圆，使它与已知三角形的各边都相切？



已知△*ABC*．根据下列作法，用直尺和圆规作⊙*O*，使它与△*ABC* 的各边都相切．

作　法	图　形
1. 分别作∠*ABC*、∠*ACB* 的平分线 *BM*、*CN*，*BM* 与 *CN* 的交点为 *O*． 2. 过点 *O*，作 *OD*⊥*BC*，垂足为 *D*． 3. 以点 *O* 为圆心，*OD* 为半径作⊙*O*．⊙*O* 就是所求作的圆．	

与三角形各边都相切的圆叫做**三角形的内切圆**(inscribed circle of triangle)．内切圆的圆心叫做**三角形的内心**(incenter of triangle)，这个三角形叫做圆的外切三角形．如图 2－46，⊙*O* 是△*ABC* 的内切圆，△*ABC* 是⊙*O* 的外切三角形．

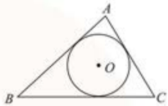


图 2－46

例 4　如图 2－47，⊙*O* 是△*ABC* 的内切圆，切点分别为 *D*、*E*、*F*，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=70^\circ$．求∠*EDF* 的度数．

解： 连接 *OE*、*OF*．

在△*ABC* 中，

$$\begin{aligned}\angle A &= 180^\circ-(\angle B+\angle C)\\ &= 180^\circ-(60^\circ+70^\circ)\\ &= 50^\circ.\end{aligned}$$

∵ ⊙*O* 是△*ABC* 的内切圆，

∴ *AB*⊥*OF*，*AC*⊥*OE*（圆的切线垂直于经过切点的半径）．

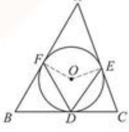


图 2－47

在四边形 $AFOE$ 中，

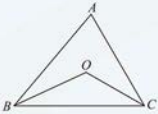
$$\angle EOF = 360° - (\angle A + \angle AFO + \angle AEO)$$
$$= 360° - (50° + 90° + 90°)$$
$$= 130°,$$
$$\therefore \angle EDF = \frac{1}{2}\angle EOF = 65°.$$

练习

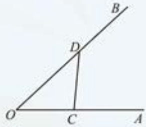
1. 如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心．根据下列条件，求 $\angle BOC$ 的度数．

(1) $\angle ABC = 50°, \angle ACB = 60°$；

(2) $\angle A = 50°$．



（第1题）



（第2题）

2. 如图，点 C、D 分别在射线 OA、OB 上．求作 $\odot P$，使它与 OA、OB、CD 都相切．

尝试与交流

如图 2-48，PA、PB 是 $\odot O$ 的切线，切点分别为 A、B. PA 与 PB 相等吗？

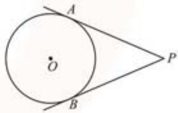
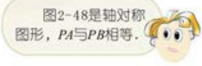


图 2-48



我们可以用下面的方法证实小明、小丽的猜想：

在图 2-48 中，连接 OA、OB、OP（如图 2-49）.

$\because$ PA、PB 是$\odot O$的切线，

$\therefore$ $PA \perp OA$，$PB \perp OB$（圆的切线垂直于经过切点的半径），

即 $\triangle POA$、$\triangle POB$ 是直角三角形.

又$\because$ $OA = OB, OP = OP$，

$\therefore$ $\triangle POA \cong \triangle POB$.

$\therefore$ $PA = PB$.

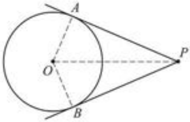


图 2-49

我们也可以运用图形运动的方法证实 $PA = PB$.

在图 2-49 中，由 $OA \perp PA$，$OB \perp PB, OA = OB$，可知点 O 在$\angle APB$ 的平分线上．于是，把图 2-49 中的 PB 沿直线 OP 翻折，射线 PB 与射线 PA 重合（如图 2-50）. 因为过点 O 有且只有一条直线与 $PA(PB)$ 垂直，所以 OB 与 OA 重合，即点 B 与点 A 重合，$PA = PB$.

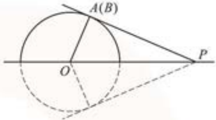


图 2-50

在经过圆外一点的圆的切线上，这点与切点之间的线段的长，叫做这点到圆的**切线长**（length of the tangent）.

于是，我们得到如下定理：

* 过圆外一点所画的圆的两条切线长相等.

例 5　如图 2 - 51，在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB、AC 分别与小圆相切于点 D、E．AB 与 AC 相等吗？为什么？

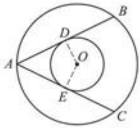


图 2 - 51

解：AB 与 AC 相等．

连接 OD、OE．

$\because$ AB、AC 是小圆的两条切线，切点分别为 D、E，

$\therefore$ $AD = AE$（过圆外一点所画的圆的两条切线长相等），

$AB \perp OD$，$AC \perp OE$（圆的切线垂直于经过切点的半径）．

又 $\because$ AB、AC 是大圆的弦，$OD \perp AB$，$OE \perp AC$，

$\therefore$ $AB = 2AD, AC = 2AE$．

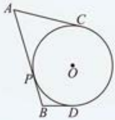
$\therefore$ $AB = AC$．

拓展延伸

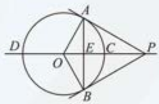
在图 2 - 51 中，如果连接 DE、BC，那么 DE 与 BC 有怎样的关系？为什么？

练习

*1. 如图，AB、AC、BD 是 $\odot O$ 的切线，切点分别为 P、C、D．若 $AB = 5, AC = 3$，求 BD 的长．



（第 1 题）



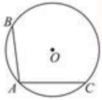
（第 2 题）

*2. 如图，PA、PB 是 $\odot O$ 的切线，切点分别为 A、B，直线 OP 交 $\odot O$ 于点 C、D，交 AB 于点 E．根据题设条件，你能得到哪些结论？为什么？

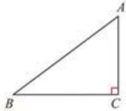
2.5 习题

1. 已知⊙O的直径为 10，圆心 O 到直线 l 的距离为 3．直线 l 与⊙O 有怎样的位置关系？圆心 O 到直线 l 的距离为 5 或 8 呢？

2. 如图，⊙O 的半径为 $2\sqrt{2}$，AB、AC 是⊙O 的两条弦，$AB = 2\sqrt{3}$，$AC = 4$．如果以点 O 为圆心作一个与 AC 相切的圆，那么这个圆的半径是多少？它与 AB 所在直线有怎样的位置关系？



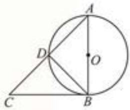
（第 2 题）



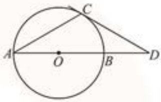
（第 3 题）

3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 3$，$BC = 4$，以点 C 为圆心，r 为半径画圆．根据下列 r 的值，判断圆与 AB 所在直线的位置关系：(1) $r = 2$；(2) $r = 2.4$；(3) $r = 3$．

4. 如图，AB 是⊙O 的直径，AD 是⊙O 的弦，过点 B 的切线交 AD 的延长线于点 C．若 $AD = DC$，求$\angle ABD$ 的度数．



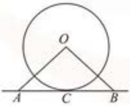
（第 4 题）



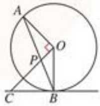
（第 5 题）

5. 如图，AB 是⊙O 的直径，AC 是⊙O 的弦，过点 C 的切线交 AB 的延长线于点 D．若 $\angle D = 30°$，求$\angle A$ 的度数．

6. 如图，直线 AB 经过⊙O 上一点 C，且 $OA = OB$，$CA = CB$．直线 AB 与⊙O 相切吗？为什么？



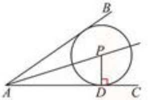
（第 6 题）



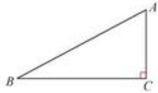
（第 7 题）

7. 如图，AB 是⊙O 的弦，点 C 在过点 B 的切线上，且 $OC \perp OA$，OC 交 AB 于点 P．判断△CBP 的形状，并说明理由．

8. 如图，P 是 $\angle BAC$ 的平分线上一点，$PD \perp AC$，垂足为 D．AB 与以点 P 为圆心，PD 为半径的圆相切吗？为什么？



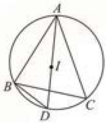
（第8题）



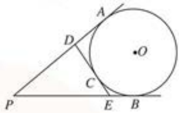
（第9题）

9. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC(\angle C=90°)$．作一个圆，使圆心 O 在 AC 上，且与 AB、BC 所在直线相切（不写作法，保留作图痕迹，并说明作图的理由）．

10. 如图，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，AI 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D．BD 与 ID 相等吗？为什么？



（第10题）

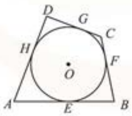


（第12题）

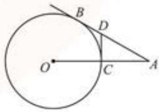
11. $\triangle ABC$ 的周长为24，面积为24，求它的内切圆的半径．

*12. 如图，PA、PB 是 $\odot O$ 的切线，切点分别为 A、B，点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，过点 C 的切线分别交 PA、PB 于点 D、E．设 $PA=10$，求 $\triangle PDE$ 的周长．

*13. 如图，四边形 $ABCD$ 的各边与 $\odot O$ 分别相切于点 E、F、G、H．AB、BC、CD、DA 之间有怎样的数量关系？为什么？



（第13题）



（第14题）

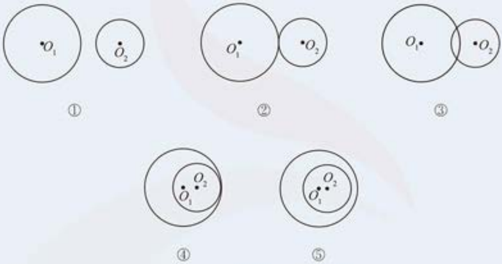
*14. 如图，AB 是 $\odot O$ 的切线，切点为 B，AO 交 $\odot O$ 于点 C，过点 C 的切线交 AB 于点 D．若 $AD=2BD$，$CD=2$，求 $\odot O$ 的半径．

阅读

圆与圆的位置关系

借助学习点与圆、直线与圆的位置关系所获得的经验，我们来探索圆与圆的位置关系．

在平面内，两圆相对运动，可以得到下列不同的位置关系（如图(1)）：

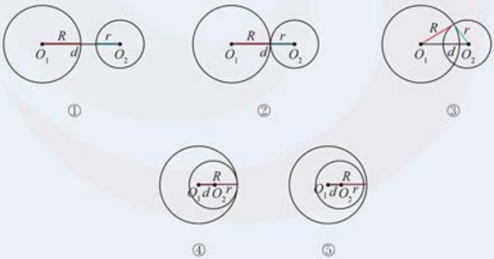


图(1)

这 5 种位置关系分别称为两圆外离、外切、相交、内切和内含．

像点与圆、直线与圆的位置关系那样，圆与圆的位置关系与相应的数量关系之间也有着内在的联系．

如图(2)，设$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 R、r，圆心 O_1、O_2 之间的距离为 d，



图(2)

观察图(2)，我们可以用 d 与 R、r 之间的数量关系来描述两圆的位置关系：

两圆外离 $\Leftrightarrow d>R+r$；

两圆外切 $\Leftrightarrow d=R+r$；

两圆相交 $\Leftrightarrow R-r<d<R+r(R\geqslant r)$；

两圆内切 $\Leftrightarrow d=R-r(R>r)$；

两圆内含 $\Leftrightarrow d<R-r(R>r)$.

图形的位置关系决定了相应数量之间的关系；反过来，由数量之间的关系可以判定图形的位置关系.

2.6 正多边形与圆

我们已经学习过等边三角形（正三角形）、正方形（正四边形）. 正三角形、正四边形的各边相等，各角也相等.

生活中，各边相等、各角也相等的多边形的形象处处可见. 例如，图 2－52 中霓虹灯的边框、螺帽的边缘等.

（1）　　（2）

图 2－52

各边相等、各角也相等的多边形叫做**正多边形**（regular polygon）.

思考与探索

我们知道，三边相等的三角形是正三角形，三角相等的三角形也是正三角形. 能否说各边相等的多边形是正多边形？或者说各角相等的多边形是正多边形？试举例说明.

操作与思考

如图 2－53，已知⊙O.

（1）用量角器把⊙O 五等分，依次连接各等分点，得五边形 $ABCDE$；

（2）五边形 $ABCDE$ 是正五边形吗？为什么？

图 2－53

如图 2－54，点 A、B、C、D、E 把⊙O 五等分.

$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$，

$\therefore AB=BC=CD=DE=EA$，

$\overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CDA}$.

$\therefore \angle A=\angle B$.

同理 $\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$.

$\therefore$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

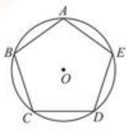


图 2－54

如图 2 - 55，点 A、B、C、D、E、F 把 $\odot O$ 六等分．

(1) 在一张透明纸上画与图 2 - 55 形状、大小相同的图形，并把它们叠合在一起；

(2) 把所画图形绕点 O 旋转 $60°$，你发现了什么？再旋转 $60°$呢？

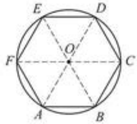


图 2 - 55

你能用图形运动的方法证实六边形 $ABCDEF$ 是正六边形吗？

一般地，只要用量角器把一个圆 $n(n \geqslant 3)$ 等分，依次连接各等分点就能得到这个圆的内接正 n 边形，这个圆是这个正 n 边形的外接圆．正多边形的外接圆的圆心叫做正多边形的中心，外接圆的半径叫做正多边形的半径．

例　如图 2 - 56，正六边形 $ABCDEF$ 的半径为 4．求这个正六边形的周长和面积．

解： 作半径 OA、OB．

根据题意，得 $\angle AOB = \dfrac{360°}{6} = 60°$．

$\because OA = OB$，

$\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形，$AB = OA = 4$．

正六边形的周长 $l = 4 \times 6 = 24$．

过点 O 作 $OG \perp AB$，垂足为 G．

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAG$ 中，

$\because OA = 4, AG = \dfrac{1}{2}AB = 2$，

$\therefore OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$．

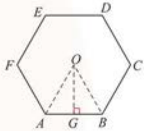
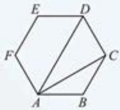


图 2 - 56

正六边形的面积 $S = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}$．

练习

1. 求半径为 r 的圆内接正方形的边长和面积.
2. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 5，求对角线 AD、AC 的长.



（第 2 题）

尝试与交流

图 2-57 中的正多边形，哪些是轴对称图形？哪些是中心对称图形？如果是轴对称图形，画出它的对称轴；如果是中心对称图形，找出它的对称中心.

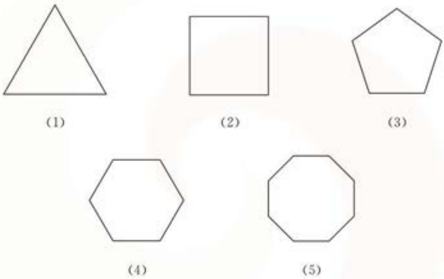


图 2-57

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都经过正 n 边形的中心. 一个正多边形，如果有偶数条边，那么它又是中心对称图形，对称中心就是这个正多边形的中心.

用直尺和圆规可以作出一些特殊的正多边形.

操作与思考

1. 作正方形．

作　法	图　形
1. 在⊙O 中作两条互相垂直的直径 AC、BD． 2. 依次连接 A、B、C、D 各点． 四边形 $ABCD$ 就是所求作的正方形．	

如何作正八边形？

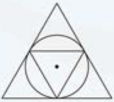
2. 作正六边形．

作　法	图　形
1. 在⊙O 中任意作一条直径 AD． 2. 分别以点 A、D 为圆心，⊙O 的半径为半径作弧，与⊙O 相交于点 B、F 和点 C、E． 3. 依次连接 A、B、C、D、E、F 各点． 六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的正六边形．	

如何作正三角形、正十二边形？

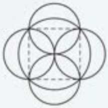
练习

1. 将一个正十边形绕它的中心至少旋转多少度，就能与它自身重合？正五边形呢？
2. 图中的两个三角形分别是圆的外切正三角形和内接正三角形．这个图形是轴对称图形吗？如果是，画出它的对称轴．
3. 用等分圆周的方法画出下列图形：



（第 2 题）

①



②

（第 3 题）

读一读

判定正多边形的条件

三边相等的三角形是正三角形.

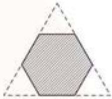
各边相等、各角也相等的多边形是正多边形.

不难发现，这两个定义有差异. 这是因为：在三角形中，由三角形的三条边相等可以推出它的三个角也相等，因而正三角形的定义中只需要“三边相等”的条件. 但是，边数大于 3 的多边形的各边(或各角)相等时，它的各角(或各边)不一定相等. 例如，菱形的四条边相等，但它的四个角不都相等；矩形的四个角相等，但它的四条边不都相等. 因而边数大于 3 的正多边形定义中需要“各边相等、各角也相等”的条件.

由此可见，三角形(特殊的多边形)具有稳定性，边数大于 3 的多边形不具有稳定性，使正三角形的定义与正多边形的定义产生了“差异”.

2.6 习题

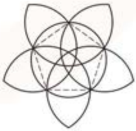
1. 正五边形被过它的顶点的半径分成多少个等腰三角形？这些等腰三角形全等吗？为什么？正六边形、正八边形呢？
2. 如图，把一个边长为 a 的正三角形纸片剪成正六边形(图中的阴影部分)，剪去的 3 个小三角形的边长应是多少？为什么？



(第 2 题)

3. 用长 24 m 的木栅栏围成正三角形或正方形或正六边形的绿地. 这三种围法中，哪一种围成的绿地面积最大？为什么？
4. 用等分圆周的方法画出下列图形：

①



②

(第 4 题)

5. 如图，AC 是$\odot O$ 的内接正六边形的一边，点 B 在$\overset{\frown}{AC}$上，且 BC 是$\odot O$ 的内接正八边形的一边．AB 是否为$\odot O$ 的内接正 n 边形的一边？如果是，求出 n 的值；如果不是，请说明理由．

（第 5 题）

（第 6 题）

6. 观察圆内接正五边形 $ABCDE$(如图)，解答下列问题：

(1) 图中，以 AB 为底，且顶角为 $36°$的等腰三角形有多少个？以 AB 为腰，且顶角为 $36°$的等腰三角形有多少个？将它们表示出来；

(2) 图中，以 AB 为底，且底角为 $36°$的等腰三角形有多少个？以 AB 为腰，且底角为 $36°$的等腰三角形有多少个？将它们表示出来．

2.7 弧长及扇形的面积

我们知道，圆上任意两点间的部分叫做弧，一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做扇形．弧是圆的一部分，扇面是圆面的一部分．

如图 2－58，当圆的半径 R 确定时，扇形的弧长随所对圆心角大小的变化而变化．设 n° 的圆心角所对的弧长为 l，探索 l 与 n 之间的数量关系．

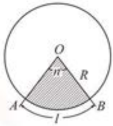
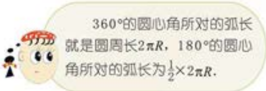


图 2－58

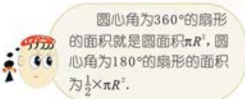


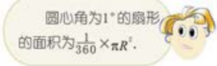
在半径为 R 的圆中，弧长 l 与所对的圆心角度数 n 之间有如下关系：

$$l=\frac{n}{360}\times 2\pi R=\frac{n\pi R}{180}.$$

在这个关系式中，当 R 为常数时，l 是 n 的正比例函数；当 n 为常数时，l 是 R 的正比例函数．

仿照上面的过程，当圆的半径 R 确定时，探索扇形的面积 $S_{扇形}$ 与扇形的圆心角度数 n 之间的数量关系．





在半径为 R 的圆中，扇形的面积 $S_{扇形}$ 与圆心角度数 n 之间有如下关系：

$$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^2.$$

上述公式揭示了 $S_{扇形}$ 与 n、R 之间的数量关系．试探索 $S_{扇形}$ 与 l、R 之间的数量关系．

$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{n\pi R}{180}\cdot R$，于是

$$S_{扇形}=\frac{1}{2}lR.$$

例 1　如图 2－59，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，$\angle BAC=60°$．设 $\odot O$ 的半径为 2，求 $\overset{\frown}{BC}$ 的长．

解：连接 OB、OC，则 $\angle BOC$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆心角．

$\because \angle BAC=60°$，

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=120°$．

$\therefore \overset{\frown}{BC}$ 的长 $l=\frac{120\pi\times 2}{180}=\frac{4}{3}\pi$．

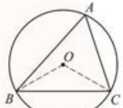


图 2－59

例 2　如图 2－60，折扇打开后，OA、OB 的夹角为 $120°$，OA 的长为 30 cm，AC 的长为 20 cm．求图中阴影部分的面积 S．

图 2－60

解：$S=S_{扇形OAB}-S_{扇形OCD}$．

$$\because S_{扇形OAB}=\frac{120\pi\times30^2}{360}=300\pi(\text{cm}^2),$$

$$S_{扇形OCD}=\frac{120\pi\times10^2}{360}=\frac{100}{3}\pi(\text{cm}^2),$$

$$\therefore S=300\pi-\frac{100}{3}\pi=\frac{800}{3}\pi(\text{cm}^2).$$

拓展与延伸

如图 2－61，半圆的直径 $AB=40$，C、D 是半圆的 3 等分点．求弦 AC、AD 与 $\overset{\frown}{CD}$ 围成的阴影部分的面积．

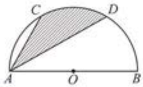


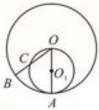
图 2－61

练习

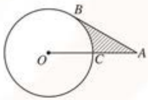
1. 已知圆弧所在圆的半径为 24，所对的圆心角为 60°，求这条弧的长．
2. 已知扇形的圆心角为 120°，弧长为 20π，求这个扇形的面积．

2.7 习题

1. 已知 75°的圆心角所对的弧长为 5π，求这条弧所在圆的半径．
2. 已知扇形的面积为 6π，半径为 4，求这个扇形的弧长．
3. 如图，OA、OB 是 $\odot O$ 的两条半径，以 OA 为直径的 $\odot O_1$ 交 OB 于点 C．$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 的长相等吗？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，AB 是 $\odot O$ 的切线，切点为 B，AO 交 $\odot O$ 于点 C，且 $AC=OC$．

（1）求 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数；

（2）设 $\odot O$ 的半径为 5，求图中阴影部分的面积．

2.8 圆锥的侧面积

我们把连接圆锥的顶点和底面圆上一点的线段叫做圆锥的母线．如图 2 - 62，线段 SA 是圆锥的母线．

在图 2 - 62 中，设圆锥的母线长为 l，圆锥的底面圆半径为 r，你能计算圆锥的侧面积吗？

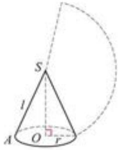


图 2 - 62

例　用铁皮制作的圆锥形容器盖如图 2 - 63 所示，求这个容器盖铁皮的面积(精确到1 cm^2)．

解： 圆锥形容器盖的底面圆周长为 $2\pi\times 40=80\pi$.

容器盖的面积

$$S=\frac{1}{2}\times 80\pi\times 50$$

$$\approx 6\ 280.$$

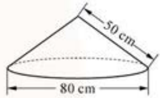


图 2 - 63

答： 这个圆锥形容器盖铁皮的面积约为 6 280 cm^2.

在半径为$\sqrt{2}$的圆形纸片中，剪一个圆心角为 90°的扇形(图 2 - 64 中的阴影部分)．

(1) 求这个扇形的面积(结果保留 π)；

(2) 若用剪得的扇形纸片围成一个圆锥的侧面，能否从剪下的 3 块余料中选取一块，剪出一个圆作为这个圆锥的底面？

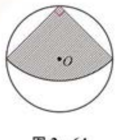


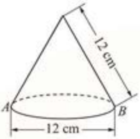
图 2 - 64

练习

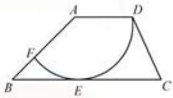
1. 设圆锥的底面圆半径为 r，圆锥的母线长为 l，用含 r、l 的式子表示圆锥的全面积 S（圆锥的全面积为圆锥的侧面积与底面积的和）.
2. 用半径为 30，圆心角为 120° 的扇形纸片围成一个圆锥的侧面，求这个圆锥的底面圆半径.

2.8 习题

1. 给一个圆锥形零件的侧面涂漆，零件的尺寸要求如图所示．求需涂漆的面积（精确到 $1\ \text{cm}^2$）.



（第 1 题）

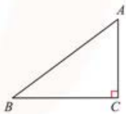


（第 2 题）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD=2$，$AB=2\sqrt{2}$，以点 A 为圆心，AD 为半径的圆与 BC 相切于点 E，交 AB 于点 F．用扇形 AFD 围成一个圆锥的侧面，求这个圆锥底面圆的半径.
3. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$.

   (1) 分别以 AC、BC 所在直线为轴，把 $\triangle ABC$ 旋转 1 周，得到两个不同的圆锥．求这两个圆锥的侧面积.

   (2) 以 AB 所在直线为轴，把 $\triangle ABC$ 旋转 1 周，求所得几何体的表面积.



（第 3 题）

数学活动

图形的密铺

如图 2 - 65，用形状、大小完全相同的一种或几种平面图形进行拼接，使图形之间没有空隙，也没有重叠地铺成一片，叫做图形的密铺．

图 2 - 65

图 2 - 66 是用全等的三角形或四边形材料密铺而成的地面．

(1)　　　(2)

图 2 - 66

思考：

用边长相同的正三角形、正六边形两种材料组合能够密铺地面吗？

要使这两种材料组合能够密铺地面，就必需满足：有公共顶点的若干个(m 个)正三角形的内角与若干个(n 个)正六边形的内角的和等于 360°，也就是二元一次方程 $m\cdot 60^\circ+n\cdot 120^\circ=360^\circ$要有正整数解．不难知道，这个二元一次方程有正整数解$\begin{cases}m=4,\\n=1\end{cases}$或$\begin{cases}m=2,\\n=2.\end{cases}$

我们可以拼出如图 2 - 67 所示的密铺图形：

(1)　　　(2)

图 2 - 67

探索：

(1) 用全等的五边形材料能够密铺地面吗？

(2) 如果限于用一种边长相同的正多边形材料密铺地面，那么哪几种材料能够密铺地面？

(3) 在边长相同的正三角形、正方形、正六边形材料中，哪几种材料组合能够密铺地面？

操作：

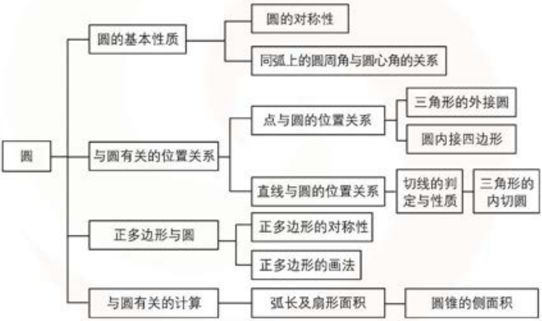
准备硬纸板、水彩等材料，三角尺、圆规、剪刀等工具．

(1) 用硬纸板剪若干块边长相同的正三角形和正方形，用这两种图形组合密铺地面；

(2) 用硬纸板剪若干块边长相同的正三角形、正方形、正六边形，用这 3 种图形组合密铺地面．

小结与思考

1．本章知识结构



2．圆是中心对称图形、轴对称图形；圆还具有绕圆心旋转任意角度都能与它自身重合的性质．

利用圆的对称性，可以得到圆的如下性质：

圆心角、弧、弦之间的关系：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等．

*垂径定理：垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧．

*切线长定理：过圆外一点所画的圆的两条切线长相等．

回顾上述定理的探索、证明过程，体会“对称”在研究图形性质中的作用．

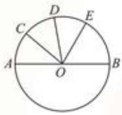
3．探索并证明图形性质常常经历如下过程：通过操作、观察……发现图形可能具有的性质；用图形运动的方法或通过推理论证，证实图形的性质．举例说明，在本章中，哪些定理的探索、证明经历了这样的过程．

4．在探索圆周角与圆心角之间数量关系时，先对圆心与圆周角的位置关系进行分类，再从特殊情形入手，通过一般到特殊的转化证实了结论．

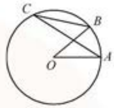
点与圆、直线与圆的位置关系反映了数与形之间的内在联系：由图形的位置关系决定数量关系，由数量关系判定图形的位置关系．

复习巩固

1．如图，AB 是⊙O 的直径，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，$\angle AOC=40°$．求$\angle BOE$ 的度数．



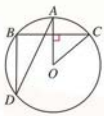
（第 1 题）



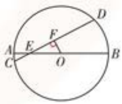
（第 2 题）

2．如图，OA、OB 是⊙O 的半径，C 是⊙O 上一点，$\angle AOB=40°$，$\angle OBC=50°$．求$\angle OAC$ 的度数．

*3．如图，BC 是⊙O 的弦，半径 $OA\perp BC$，点 D 在⊙O 上，且$\angle ADB=25°$．求$\angle AOC$ 的度数．



（第 3 题）

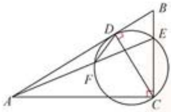


（第 4 题）

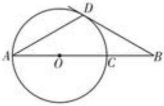
*4．如图，在⊙O 中，直径 AB 交弦 CD 于点 E，$OF\perp CD$，垂足为 F，$AE=1$，$BE=5$，$OF=1$．求 CD 的长．

5．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为 D，E 是

BC 上一点，过 C、E、D 三点的圆交 AE 于点 F. $\angle DFE$ 与 $\angle BAC$ 相等吗？为什么？



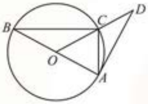
（第 5 题）



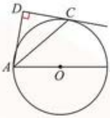
（第 6 题）

6. 如图，AD 是$\odot O$的弦，AB 经过圆心 O 交$\odot O$于点 C，$\angle A = \angle B = 30°$. BD 与$\odot O$有怎样的位置关系？为什么？

7. 如图，$\triangle ABC$ 是$\odot O$的内接三角形，AB 是$\odot O$的直径，$\angle BAC = 2\angle B$，过点 A 的切线交 OC 的延长线于点 D. 若$\odot O$的半径为 2，求 AD 的长.



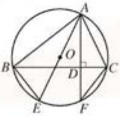
（第 7 题）



（第 8 题）

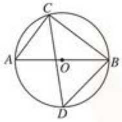
8. 如图，AB 是$\odot O$的直径，点 C 在$\odot O$上，AD 垂直于过点 C 的切线，垂足为 D，且$\angle BAD = 80°$. 求$\angle DAC$的度数.

9. 如图，$\triangle ABC$ 是$\odot O$的内接三角形，AE 是$\odot O$的直径，AF 是$\odot O$的弦，且 $AF \perp BC$，垂足为 D. BE 与 CF 相等吗？为什么？

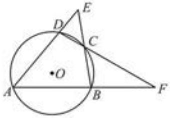


（第 9 题）

10. 如图，AB 是$\odot O$的直径，AC 是$\odot O$的弦，$\angle ACB$ 的平分线交$\odot O$于点 D．若 $AB=10$，$AC=6$，求 BC、BD 的长．



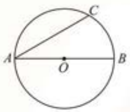
（第 10 题）



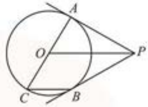
（第 11 题）

11. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，AD、BC 的延长线相交于点 E，AB、DC 的延长线相交于点 F，且$\angle E=50^\circ$，$\angle F=30^\circ$．求$\angle A$ 的度数．

12. 如图，AB 是$\odot O$的直径，AC 是$\odot O$的弦，$AB=2$，$\angle BAC=30^\circ$．在图中作弦 AD，使 $AD=1$，并求$\angle CAD$ 的度数．



（第 12 题）

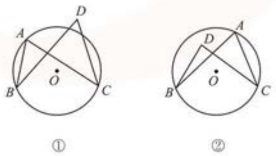


（第 13 题）

*13. 如图，AC 是$\odot O$的直径，PA、PB 是$\odot O$的切线，切点分别为 A、B．OP 与 CB 有怎样的位置关系？为什么？

14. (1) 如图①，点 A、B、C 在$\odot O$上，点 D 在$\odot O$外，比较$\angle BAC$ 与$\angle BDC$ 的大小，并说明理由；

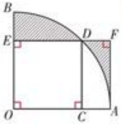
(2) 如图②，点 A、B、C 在$\odot O$上，点 D 在$\odot O$内，比较$\angle BAC$ 与$\angle BDC$ 的大小，并说明理由.



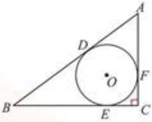
（第 14 题）

灵活运用

15. 如图，扇形 OAB 的圆心角为直角，边长为 1 的正方形 $OCDE$ 的顶点 C、D、E 分别在 OA、$\overparen{AB}$、OB 上，$AF \perp ED$，交 ED 的延长线于点 F．求图中阴影部分的面积．



（第 15 题）



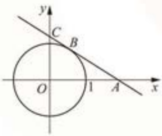
（第 16 题）

*16. 如图，在△ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，⊙O 是△ABC 的内切圆，切点分别为 D、E、F．若 $BD = 6$，$AD = 4$，求⊙O 的半径 r．

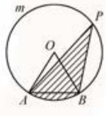
17. 如图，在平面直角坐标系中，⊙O 的半径为 1，过点 $A(2, 0)$的直线与⊙O 相切于点 B，与 y 轴相交于点 C．

（1）求 AB 的长；

（2）求直线 AC 相应的一次函数表达式．



（第 17 题）



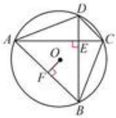
（第 18 题）

18. 如图，AB 是⊙O 的弦，$AB=2$，点 P 在 $\overparen{AmB}$上运动，且$\angle APB=30^\circ$．

（1）求⊙O 的半径；

（2）设点 P 到直线 AB 的距离为 x，图中阴影部分的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数关系，并写出自变量 x 的取值范围．

*19. 如图，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，且 $AC\perp BD$，$OF\perp AB$，垂足分别为 E、F．OF 与 CD 有怎样的数量关系？为什么？



（第 19 题）

20. 在同一平面内，已知点 O 到直线 l 的距离为 5．以点 O 为圆心，r 为半径画圆．

（1）当 $r=$ ______ 时，⊙O 上有且只有 1 个点到直线 l 的距离等于 3；

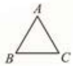
（2）当 $r=$ ______ 时，⊙O 上有且只有 3 个点到直线 l 的距离等于 3；

（3）随着 r 的变化，⊙O 上到直线 l 的距离等于 3 的点的个数有哪些变化？求出相对应的 r 的值或取值范围．

探索研究

21. 如图，$\triangle ABC$ 是边长为 1 cm 的正三角形．

（1）画图：将线段 CA 绕点 C 按顺时针方向旋转 120° 至 CP_1，形成扇形 D_1；将线段 BP_1 绕点 B 按顺时针方向旋转 120° 至 BP_2，形成扇形 D_2；将线段 AP_2 绕点 A 按顺时针方向旋转 120° 至 AP_3，形成扇形 D_3；将线段 CP_3 绕点 C 按顺时针方向旋转 120° 至 CP_4，形成扇形 D_4……



（第 21 题）

（2）设 l_n 为扇形 D_n 的弧长（$n=1,2,3$……）．

填表：

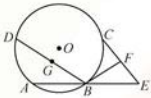
n	1	2	3	4
l_n				

根据上表所反映的规律，试估计 n 至少为何值时，扇形 D_n 的弧长能够绕地球赤道 1 周(设地球赤道半径为6 400 km)．

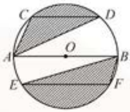
22. 如图，点 A、B、C、D 在$\odot O$ 上，且$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，$E$ 是 AB 延长线上一点，且 $BE=AB$，F 是 EC 的中点.

(1) 探索 BF 与 BD 之间的数量关系，并说明理由；

(2) 设 G 是 BD 的中点，在$\odot O$ 上是否存在点 P（点 B 除外)，使得 $PG=PF$？为什么？



(第 22 题)



(第 23 题)

23. 运用图形运动的方法研究下列问题：

如图，AB 是$\odot O$ 的直径，CD、EF 是$\odot O$ 的弦，且 $AB/\!/CD/\!/EF$，$AB=10$，$CD=6$，$EF=8$．求图中阴影部分的面积．

后　　记

本套教材是以《义务教育数学课程标准(2011年版)》为依据，在广泛听取专家、实验区师生的意见和建议的基础上，对《义务教育课程标准实验教科书 数学(苏科版)》(以下简称“实验本”)进行修订而成的，供义务教育 7～9 年级使用．

本套教材每章的开头部分设置：章头图，章头语，章头问题，本章内容概述．

每章的内容部分设置：

“数学实验室”——通过“做”数学，感悟、理解数学知识；

“数学活动”——运用本章知识解决一些简单的问题；

“阅读”和“读一读”——介绍数学思想方法、拓展课本内容；

“练一练”——按课时编写，供当堂练习用；

“习题”——按节编写，供本节各个课时课后作业用．

每章的末尾部分设置：

“小结与思考”——梳理本章知识的结构、提炼基本思想；

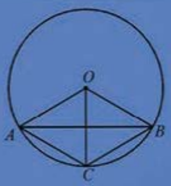
“复习题”（分为复习巩固、灵活应用、探索研究三个层次）——供本章复习时用，其中“灵活应用”、“探索研究”部分的习题可根据实际情况选用．

本套教材的每册课本设置一个“课题学习”——综合运用有关知识解决实际问题．全书使用了卡通人“小明”、“小丽”，并根据课程内容展开的需要，编写了一些卡通语．

“实验本”教材由杨裕前、董林伟任主编，丁伟明、李善良曾任副主编．参与本册各章（“实验本”）编写的有朱建明、周凯、孔凡海．

修订后的本套教材由杨裕前、董林伟任主编．参与本册修订的编写人员有周凯、杨秋萍、徐延觉、朱建明、荆福仁；参与修订讨论的有王永建、周学祁、陈志廉．

史宁中教授、顾泠沅教授、张英伯教授等专家、同行，对本套教材的修订给予了热情的帮助和指导，提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心感谢！



数学

SHU XUE

九年级 上册